

1

Abollamiento

EL PANDEO POR ABOLLAMIENTO

Introducción

Hasta ahora hemos visto el pandeo de barras, o sea, piezas en las cuales las dimensiones de su sección transversal son muy pequeñas con relación a su longitud o altura. Es decir que una dimensión es preponderante con respecto a las otras dos.

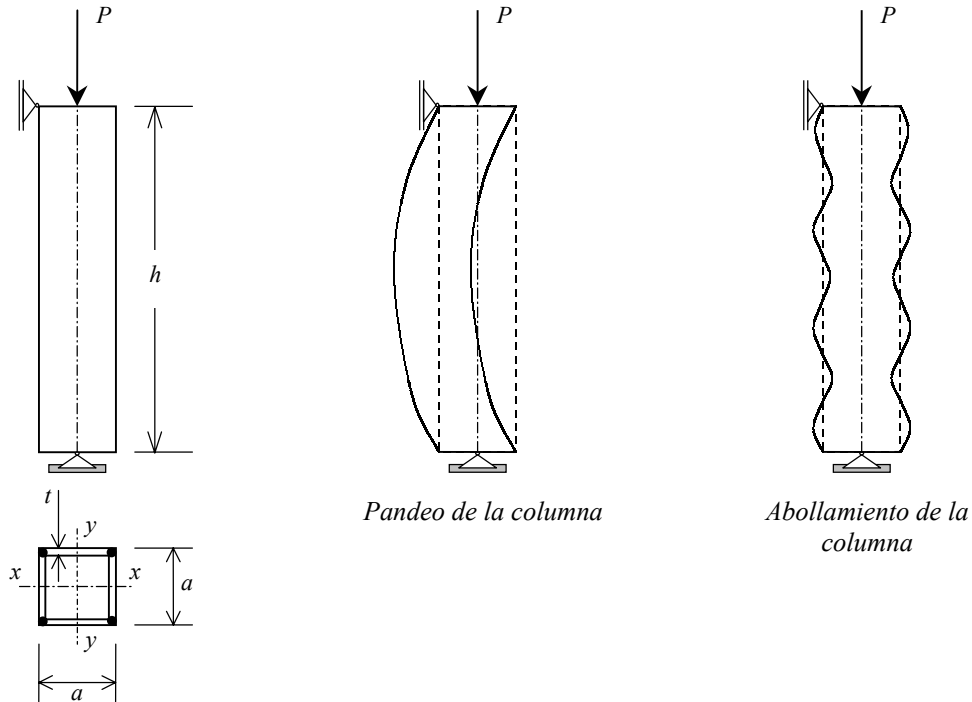
Estudiaremos ahora los fenómenos de la inestabilidad del equilibrio y sus consecuencias en la capacidad resistente de una pieza en la cual dos de sus dimensiones son preponderantes respecto a la tercera. Estas piezas se llaman "placas" y ya fueron estudiadas en los cursos anteriores de nuestra facultad, obteniéndose así las relaciones entre tensiones y deformaciones, tensiones para la acción de cargas transversales a su plano medio, tensiones para la acción de cargas que yacen en su plano medio, pero no se ha estudiado el fenómeno de inestabilidad del equilibrio en placas, que será lo que haremos en forma muy sintética con el objeto de dar una explicación, en parte, a los procedimientos que para este caso imponen las Normas de Cálculo.

Estas placas generalmente van asociadas a otras secciones formando una pieza estructural (columna o viga) y su comportamiento ante el pandeo, que para estos casos se denomina "abollamiento", puede determinar un límite muy inferior a la capacidad resistente que se obtendría con los conocimientos que hasta el momento posee el estudiante.

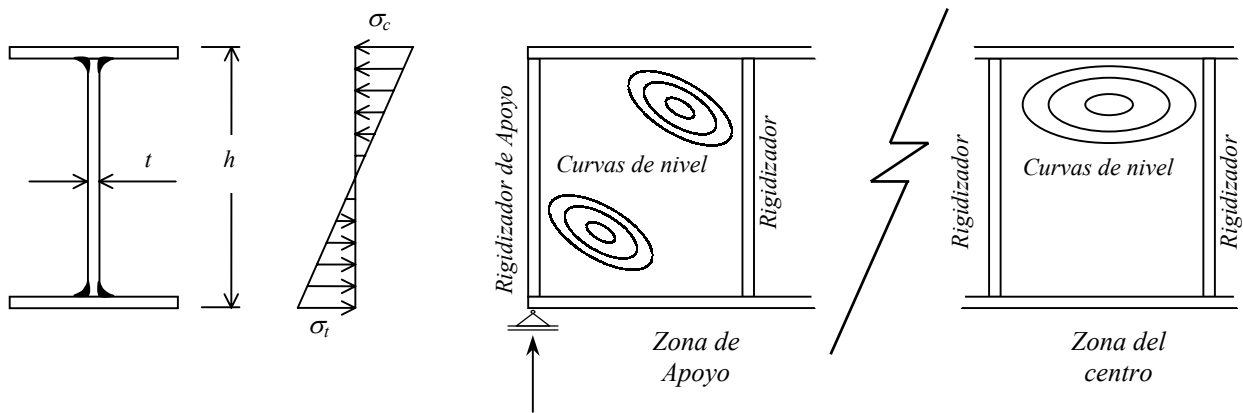
Ejemplo 1: Columna compuesta por 4 placas unidas entre sí mediante soldaduras.

La columna puede destruirse por dos formas de inestabilidad: Pandeo de la pieza en conjunto y Pandeo de las placas (o abollamiento) que conforman la sección transversal. El procedimiento para el primer caso es conocido y conduce a una carga crítica que designamos Pk_1 . Aprenderemos a partir de aquí a calcular la carga crítica por abollamiento que designaremos Pk_2 .

Cuando $Pk_2 < Pk_1$ se dice que tendremos "abollamiento prematuro" porque se produce con valores inferiores a la carga crítica de pandeo y constituye el fenómeno principal en el cálculo.



Ejemplo 2: Viga compuesta por 2 placas de alas y 1 de alma, soldadas entre sí.

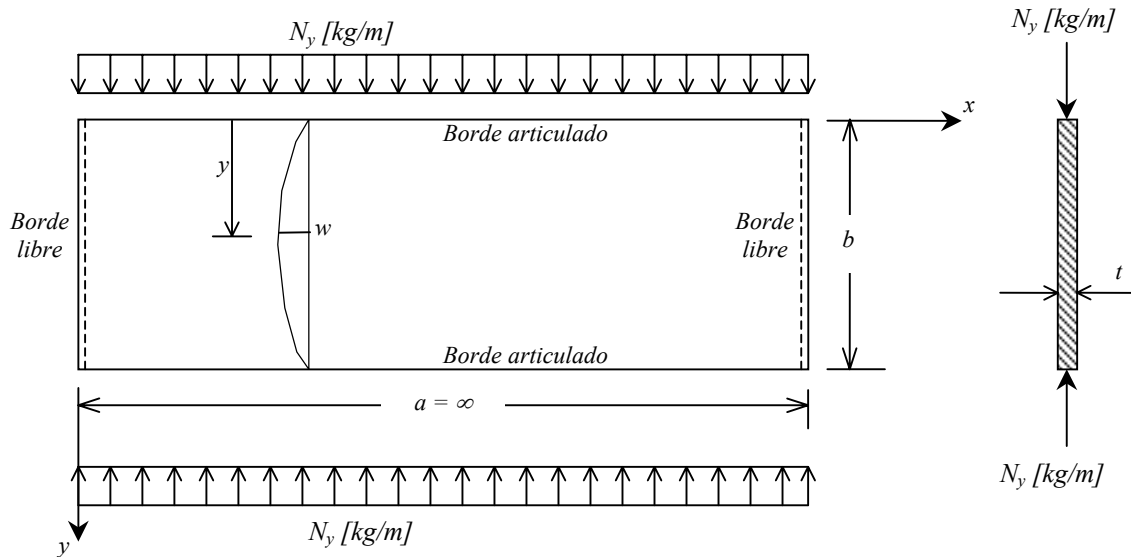


Generalmente h es mucho mayor a t . Si bien la viga se ha verificado de tal manera que las tensiones y deformaciones sean inferiores a las admisibles, la abollamiento del alma de la viga puede ser el fenómeno fundamental en el cálculo de la capacidad resistente de la viga.

El alma de la viga se divide en recuadros por medio de "rigidizadores" que son elementos formados por perfiles que apoyándose en las alas impidan, a manera de viga, la deformación de la placa en ese punto. Se han dibujado curvas de nivel de la placa de alma abollada que tiene dos formas distintas según se trate de un recuadro en el apoyo de la viga o en el centro de la luz de la viga. En el primer caso tenemos Abollamiento por los Esfuerzos Tangenciales y en el segundo caso tendremos Abollamiento por los Esfuerzos Normales de Compresión. Pero a diferencia con el caso de columnas en donde la aparición de la abollamiento es causa del colapso, ahora a pesar de la abollamiento del alma, la viga sigue resistiendo, o sea, tiene una resistencia "post-crítica". Esta diferencia de comportamiento se tiene en cuenta con valores del coeficiente de seguridad muy diferentes.

PLACA DE EULER

Es una placa cargada con una carga uniformemente repartida N_y sobre dos bordes opuestos apoyados articuladamente. Los otros dos bordes son libres. El borde cargado es infinitamente largo.



El pandeo por abollamiento o simplemente "*abollamiento*" que se produce se denomina "*abollamiento cilíndrico*" ya que por las características de carga y vínculos para un valor constante de "y", la flecha por abollamiento "w" es una constante para cualquier valor de "x". Se ha dibujado en corte la deformada por abollamiento rebatida sobre el plano del dibujo.

Para resolver el problema haremos una serie de hipótesis simplificativas:

- ⊕ El material es infinitamente elástico, es decir, que la ley de Hooke se cumple sin limitaciones.
- ⊕ El material es isótropo y homogéneo.
- ⊕ Las articulaciones son perfectas.
- ⊕ Las cargas yacen en el plano medio de la placa.

Recordemos que en la barra de Euler:

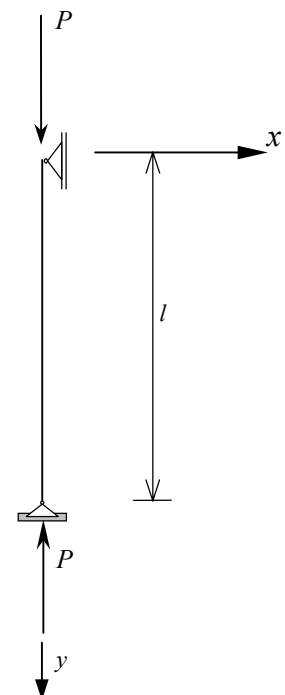
$$\sigma_y = E \cdot \varepsilon_y \quad (1)$$

En el análisis de la ecuación de equilibrio hallamos la fórmula:

$$P_k = E \cdot I \cdot \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \quad (\text{Fórmula de Euler})$$

O en otra forma:

$$\sigma_k = \frac{P_k}{\Omega} = \left(\frac{E \cdot I}{\Omega}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2$$



En una placa la relación entre tensiones y deformaciones es:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\mu^2)} \cdot (\varepsilon_x + \mu \cdot \varepsilon_y) \qquad \sigma_y = \frac{E}{(1-\mu^2)} \cdot (\varepsilon_y + \mu \cdot \varepsilon_x)$$

μ = módulo de Poisson = 0.3 para el acero.

En la placa que hemos planteado: $a = \infty$

por lo que: $\varepsilon_x = \frac{\Delta l_x}{a} = \frac{\Delta l_x}{\infty} = 0$

por lo tanto:

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-\mu^2)} \cdot (\varepsilon_y + \mu \cdot 0) = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \varepsilon_y$$

Si llamamos $E_r = \frac{E}{(1-\mu^2)}$ = Módulo de elasticidad reducido.

tendremos que: $\sigma_y = E_r \cdot \varepsilon_y$

O sea, es igual a la ecuación (1) con la sola diferencia que en vez de E se pone E_r . Es como si tuviéramos un material con el mismo comportamiento pero de diferente módulo de elasticidad.

$$E_r = \frac{E}{(1-\mu^2)} = \frac{E}{(1-0.3^2)} = 1,1 \cdot E$$

Por lo tanto las ecuaciones de la barra de Euler son aplicables a la placa de Euler con solo cambiar E_r por E .

La tensión de abollamiento de la placa de Euler será:

$$\sigma_e = \frac{E_r \cdot I}{\Omega} \cdot \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 = \frac{E_r \cdot \frac{a \cdot t^3}{12}}{a \cdot t} \cdot \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{t^2}{12} \cdot \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 = \frac{E \cdot \pi^2}{12 \cdot (1-\mu^2)} \cdot \left(\frac{t}{b}\right)^2$$

Para el acero: $E = 2.100.000 \text{ Kg/cm}^2 = 2.100 \text{ ton/cm}^2$; $\mu = 0,3$

Tendremos: $\sigma_e = 1898 \cdot \left(\frac{t}{b}\right)^2$ [ton / cm²]

o bien: $\sigma_e = \left(1378 \cdot \frac{t}{b}\right)^2$ [Kg / cm²]

Según CIRSOC: $\sigma_e = 0,901 \cdot E \cdot \left(\frac{t}{b}\right)^2$

Esta placa de Euler, por sus características, es difícil de encontrar en la realidad, pero su importancia teórica es muy grande ya que otros casos de carga, apoyos y relación de dimensiones ($a = \text{finito}$), puede resolverse en la forma:

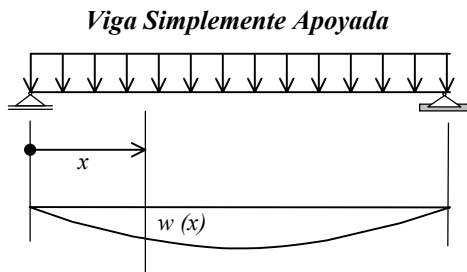
$$\sigma_k = k \cdot \sigma_e$$

En donde k puede ser una constante o una función. El problema es hallar el valor de k .

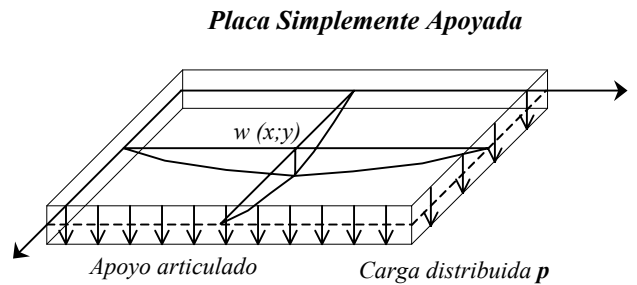
ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA PLACA ABOLLADA

La demostración de la fórmula que resuelve el caso de abollamiento de una placa con cargas que yacen en su plano medio, se puede encontrar en la "Teoría de Placas" de Timoshenko.

Veremos solamente una comparación entre los casos de barras y placas para apreciar la similitud de las fórmulas.



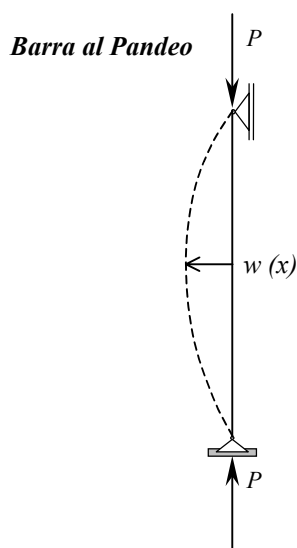
$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{p}{E.I}$$



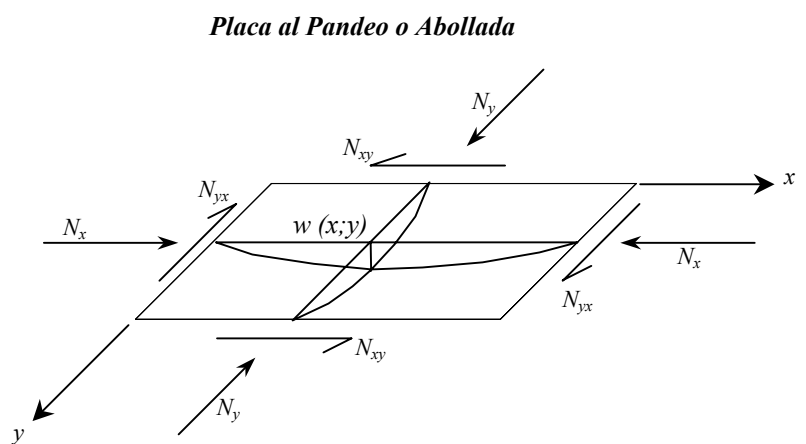
$$\nabla^4 w = \frac{p}{E_r \cdot I}$$

ó escrito de otra manera:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{E_r \cdot I}$$



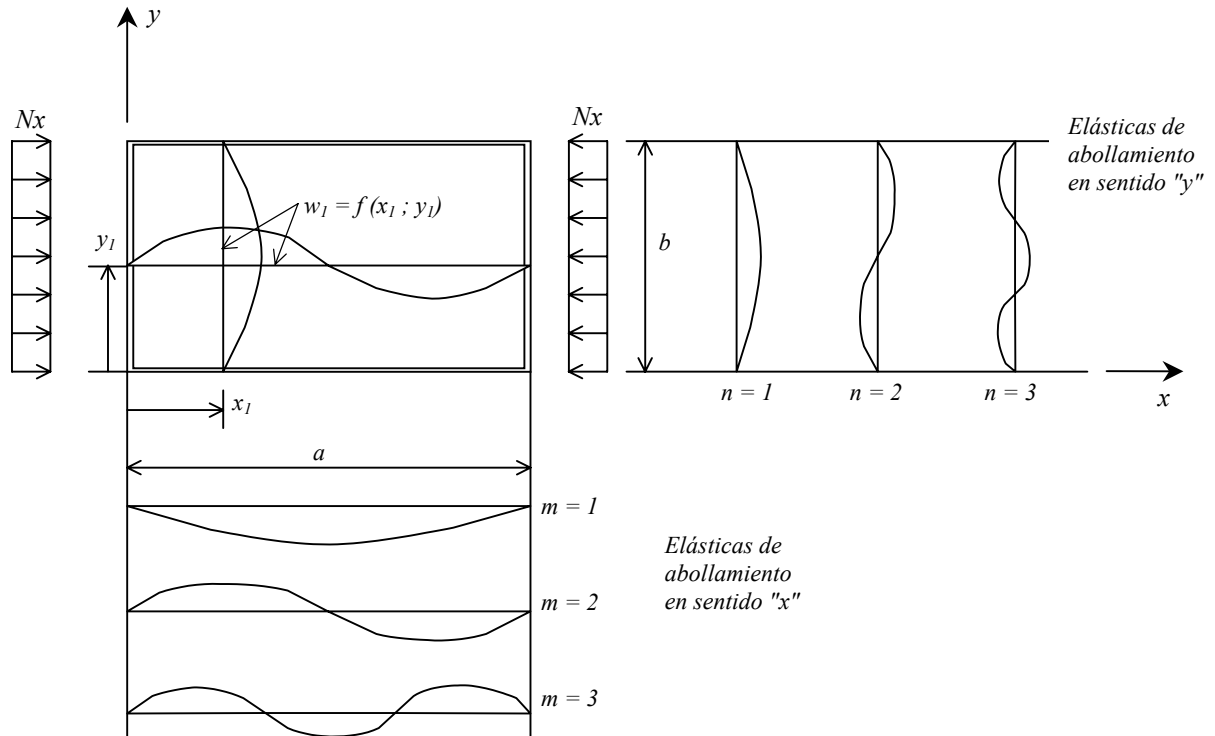
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{p}{E.I} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$



$$\nabla^4 w + \frac{I}{E_r \cdot I} \left(N_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \cdot N_{xy} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$$

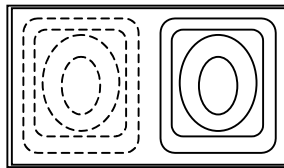
CASO FUNDAMENTAL DE BRYAN

Tenemos ahora una placa con ambas dimensiones finitas y apoyada articuladamente en sus cuatro bordes. La carga es uniformemente repartida en el sentido "x".



En un punto de coordenadas x_1, y_1 , tendremos una elástica $w(x_1, y_1)$. Si hacemos un corte de la placa abollada en ese punto (x_1, y_1) y paralelo al eje "x", podemos dibujar sobre la placa el corte rebatido sobre el plano del dibujo. En este caso vemos que tenemos dos semiondas de abollamiento en el sentido "x". Si llamamos "m" al número de semiondas en el sentido "x" tendremos $m = 2$. En la misma forma para el sentido "y", tendremos $n = 1$.

En la figura de abajo dibujamos las curvas de nivel de la placa abollada para una mejor comprensión.



La ecuación diferencial de la placa abollada ya vimos que es:

$$\nabla^4 w + \frac{I}{E_r \cdot I} \left(N_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \cdot N_{xy} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$$

En la Placa de Bryan es $N_{xy} = N_y = 0$

Entonces:

$$\nabla^4 w + \frac{I}{E_r \cdot I} \cdot N_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

O sea:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{I}{E_r \cdot I} \cdot N_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

Bryan propone tomar como solución de esta ecuación a la siguiente expresión:

$$w = C \cdot \text{sen} \frac{m \cdot \pi}{a} \cdot x \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi}{b} \cdot y$$

Esta solución cumple con las condiciones de borde que son:

$$x = 0 \quad ; \quad x = a \quad \Rightarrow \quad w = 0$$

$$y = 0 \quad ; \quad y = b \quad \Rightarrow \quad w = 0$$

Hacemos las derivadas sucesivas de w :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{m \cdot \pi}{a} \cdot C \cdot \cos \frac{m \cdot \pi}{a} \cdot x \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi}{b} \cdot y$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\left(\frac{m \cdot \pi}{a}\right)^2 \cdot C \cdot \text{sen} \frac{m \cdot \pi}{a} \cdot x \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi}{b} \cdot y = -\left(\frac{m \cdot \pi}{a}\right)^2 \cdot w$$

Se pueden deducir las otras derivadas:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \left(\frac{m \cdot \pi}{a}\right)^4 \cdot w$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \left(\frac{m \cdot \pi}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{n \cdot \pi}{b}\right)^2 \cdot w$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \left(\frac{n \cdot \pi}{b}\right)^4 \cdot w$$

Estas derivadas reemplazadas en la ecuación diferencial quedan:

$$w \cdot \left[\left(\frac{m \cdot \pi}{a}\right)^4 + 2 \cdot \left(\frac{m \cdot \pi}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{n \cdot \pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n \cdot \pi}{b}\right)^4 - \left(\frac{m \cdot \pi}{a}\right)^2 \cdot \frac{N_x}{E_r \cdot I} \right] = 0$$

Como $w \neq 0$

$$\text{debe ser : } \left[\left(\frac{m \cdot \pi}{a}\right)^4 + 2 \cdot \left(\frac{m \cdot \pi}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{n \cdot \pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n \cdot \pi}{b}\right)^4 - \left(\frac{m \cdot \pi}{a}\right)^2 \cdot \frac{N_x}{E_r \cdot I} \right] = 0$$

Por lo que:

$$\left[\left(\frac{m \cdot \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n \cdot \pi}{b}\right)^2 \right]^2 = \left(\frac{m \cdot \pi}{a}\right)^2 \cdot \frac{N_x}{E_r \cdot I}$$

$$\text{Despejando: } N_x = E_r \cdot I \cdot \left[\frac{\left(\frac{m \cdot \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n \cdot \pi}{b}\right)^2}{\frac{m \cdot \pi}{a}} \right]^2 = E_r \cdot I \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{m}{a} + \frac{n^2}{m} \cdot \frac{a}{b^2} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_x = \frac{E_r \cdot I \cdot \pi^2}{b^2} \cdot \left(\frac{m}{\frac{a}{b}} + \frac{n^2}{m} \cdot \frac{a}{b} \right)^2$$

Estudiamos cuando $n = 1$, o sea, cuando tenemos la menor carga de equilibrio indiferente, es decir, la carga crítica.

$$\sigma_x = \frac{N_x}{\Omega} \Rightarrow N_x = \sigma_x \cdot (t \cdot l) = \frac{E \cdot I \cdot \frac{t^3}{12} \cdot \pi^2}{(1 - \mu^2) b^2} \cdot \left(\frac{m}{\frac{a}{b}} + \frac{a}{m} \right)^2$$

$$\sigma_x = \frac{E \cdot \pi^2}{12 \cdot (1 - \mu^2)} \cdot \left(\frac{t}{b} \right)^2 \cdot \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\alpha}{m} \right)^2 \quad \text{con } \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\sigma_x = \sigma_e \cdot \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\alpha}{m} \right)^2 \quad \text{con } \sigma_e = \text{Tensión crítica en la placa de Euler.}$$

Si llamamos $k = \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\alpha}{m} \right)^2 = \frac{m^2}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{m^2} + 2$

tendremos que:

$$\sigma_x = k \cdot \sigma_e$$

$$\sigma_k = k_{\min} \cdot \sigma_e$$

Para hallar k_{\min} derivamos a k :

$$\frac{dk}{dm} = \frac{2 \cdot m}{\alpha^2} - 2 \cdot \frac{\alpha^2}{m^3} = 2 \cdot m \cdot \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{\alpha^2}{m^4} \right) = 0$$

Por lo tanto:

$$\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{\alpha^2}{m^4} \right) = 0 \Rightarrow m^4 = \alpha^4 \Rightarrow m = \alpha$$

El valor de k_{\min} se obtiene cuando $m = \alpha$.

$$k = \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\alpha}{m} \right)^2 \therefore$$

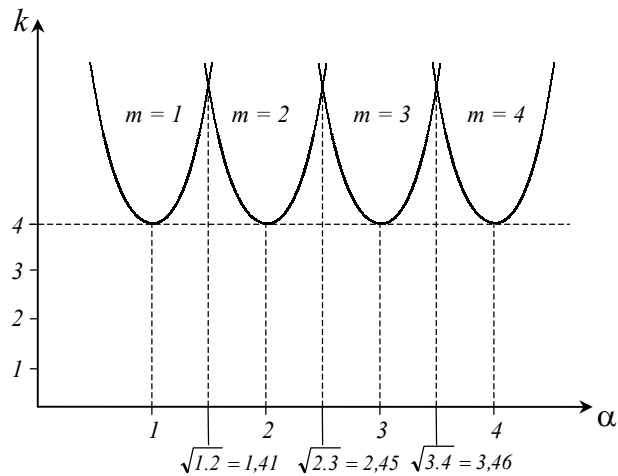
Para $\alpha = 1$ $k_{1\min} = (1+1)^2 = 4$

Para $\alpha = 2$ $k_{2\min} = (1+1)^2 = 4$

Para $\alpha = 3$ $k_{3\min} = (1+1)^2 = 4$

Para $\alpha = m$ $k_{m\min} = (1+1)^2 = 4$

Representamos gráficamente la variación de k en función de α , para $m = \text{cte} = 1, 2, 3, \dots, \text{etc.}$



Veamos los valores de k para $\alpha < 1$, con $m = 1$.

$$\text{Para } \alpha = 0,1: \quad k = \left(\frac{1}{0,1} + \frac{0,1}{1} \right)^2 = 102,01$$

$$\text{Para } \alpha = 0,2: \quad k = \left(\frac{1}{0,2} + \frac{0,2}{1} \right)^2 = 27,04$$

$$\text{Para } \alpha = 0,5: \quad k = \left(\frac{1}{0,5} + \frac{0,5}{1} \right)^2 = 6,25$$

$$\text{Para } \alpha = 0,9: \quad k = \left(\frac{1}{0,9} + \frac{0,9}{1} \right)^2 = 4,04$$

$$\text{Para } \alpha = 1: \quad k = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \right)^2 = 4$$

Para valores de $\alpha > 1$ y siempre para $m = 1$, el valor de k vuelve a crecer.

Para $m = 2$ se obtiene una curva parecida a la de $m = 1$, y también según vimos, con un $k_{\min} = 4$, para $\alpha > 1$. Esta curva se cruza con la de $m = 1$ para un α comprendido entre 1 y 2.

La ubicación de los puntos de intersección se obtiene de la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{m_i + \alpha}{\alpha m_i} \right)^2 = \left(\frac{m_{i+1} + \alpha}{\alpha m_{i+1}} \right)^2$$

$$m_i + \frac{\alpha^2}{m_i} = m_{i+1} + \frac{\alpha^2}{m_{i+1}}$$

$$\alpha^2 \cdot \left(\frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) = m_i - m_{i+1}$$

$$\alpha^2 = m_i \cdot m_{i+1} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \sqrt{m_i \cdot m_{i+1}}$$

Entonces tendremos que:

$$\alpha_{1-2} = \sqrt{1.2} = 1,41$$

$$\alpha_{2-3} = \sqrt{2.3} = 2,45$$

$$\alpha_{3-4} = \sqrt{3.4} = 3,46$$

Para todo $\alpha \leq 1,41$ el k_{\min} se produce con $m = 1$.

Para todo $1,41 \leq \alpha \leq 2,45$ el k_{\min} se produce con $m = 2$.

Para todo $2,45 \leq \alpha \leq 3,46$ el k_{\min} se produce con $m = 3$.

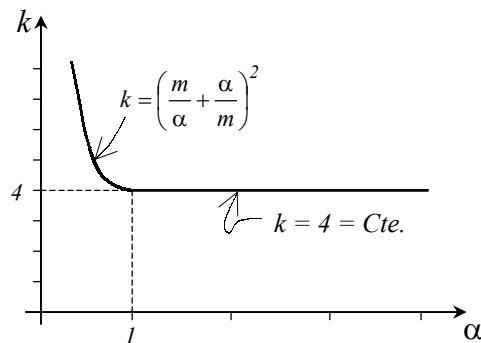
Como vemos, el menor valor de k para cualquier valor de $m \geq 1$ es $k = 4$.

Por ejemplo:

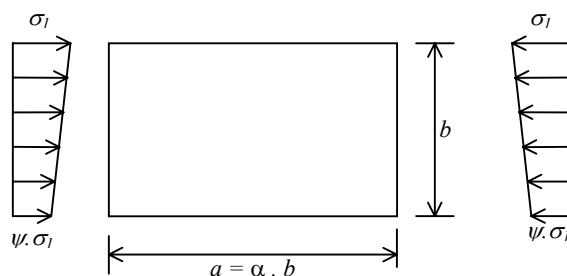
$$\alpha = \frac{a}{b} = 1,5 > 1,41 \Rightarrow m = 2$$

$$k = \left(\frac{2}{1,5} + \frac{1,5}{2} \right)^2 = 4,34$$

Las normas no consideran estos valores y toman una envolvente recta y horizontal de $k = 4$ para los $\alpha \geq 1$.



La norma DIN 4114 toma el siguiente caso en la Tabla 6 del párrafo 17, y el CIRSOC, que repite casi exactamente dicha norma, en la Tabla 10, página 49 (CIRSOC 302).



Para $\alpha \geq 1$ es $k = \frac{8,4}{\psi + 1,1}$

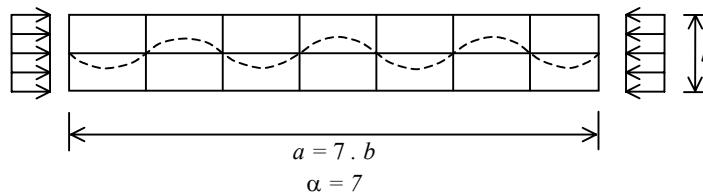
Para $\alpha < 1$ es $k = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)^2 \cdot \frac{2,1}{\psi + 1,1}$

Para el caso estudiado: $\psi = 1$

Para $\alpha \geq 1$ es $k = \frac{8,4}{1+1,1} = 4$

Para $\alpha < 1$ es $k = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 \cdot \frac{2,1}{2,1} = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2$

Si tenemos una placa como la siguiente:



Se producen 7 semiondas de abollamiento (pues $m = a/b$).

$$\sigma_k = k \cdot \sigma_e = 4 \cdot \sigma_e$$

Si reducimos el valor del lado “a” hasta el valor $a = 4 \cdot b$, el abollamiento se producirá con 4 semiondas y siempre:

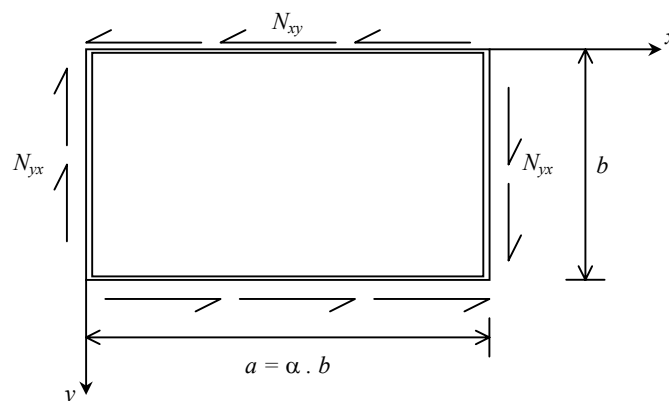
$$\sigma_k = 4 \cdot \sigma_e$$

y en la misma forma, para $\alpha = 3$, $\alpha = 2$ y $\alpha = 1$.

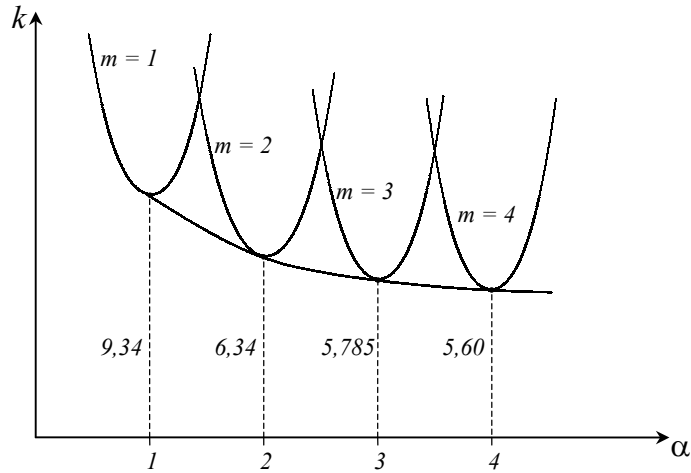
Para todos será $\sigma_k = 4 \cdot \sigma_e$, con 3, 2 y 1 semiondas de abollamiento.

El aumento de σ_k se producirá para los $\alpha < 1$, tal como vimos anteriormente. Por ejemplo, con $\alpha = 0,5$ será $\sigma_k = 6,25 \cdot \sigma_e$, con 1 semionda de abollamiento.

Placa con Cargas Tangenciales. Apoyos Articulados



La resolución da los siguientes valores:



Para $\alpha \geq 1$ es $k = 5,34 + \frac{4}{\alpha^2}$

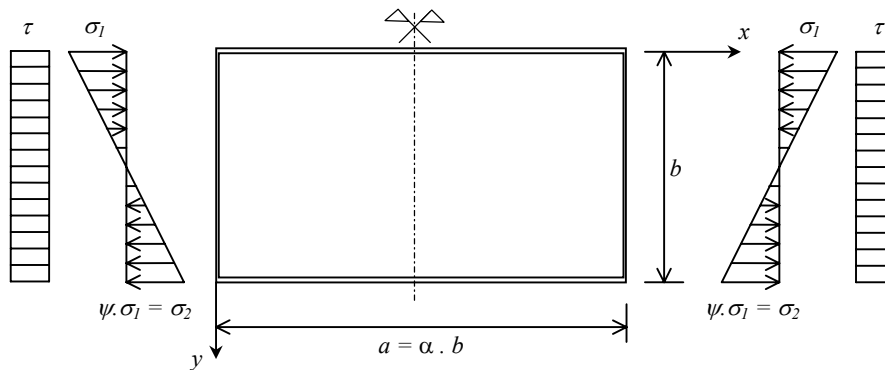
Para $\alpha < 1$ es $k = 4 + \frac{5,34}{\alpha^2}$

Ver DIN 4114, Acero en la Construcción, página 648, 655, 657, 685 y 686.

Ver CIRSOC 302, páginas 25 y 26 (2.3) y en página 47, capítulo 6.

Ver CIRSOC 302-1, página 75, capítulo 10 y página 79, capítulo 11.

Placa cargada simultáneamente con Esfuerzos Normales y Tangenciales. Círculo de Chwalla



Las tensiones tangenciales tienen una repartición uniforme. Las tensiones normales tienen una repartición lineal con compresión en la zona superior y con tensiones que pueden ser de tracción en la parte inferior.

Este caso se presenta en el caso de vigas doble T armadas. Las tensiones corresponden al centro de la placa. Esta placa es una parte del alma limitada por las alas superior e inferior y por dos rigidizadores verticales.

La placa está en buenas condiciones de seguridad si se cumple que:

$$\begin{cases} \tau \leq \tau_{adm} \\ \sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_1^2 + 3 \cdot \tau^2} \leq \sigma_{adm} \end{cases}$$

Falta verificar si a pesar de cumplir las dos condiciones anteriores, la placa posee una adecuada seguridad a la abollamiento.

El sentido conceptual de σ_{eq} es que cuando $\sigma_{eq} = \sigma_F$ se produce la Fluencia aunque σ_1 ni τ alcancen a producir la fluencia actuando separadamente.

Con el mismo concepto calculamos una tensión de comparación crítica de abollamiento σ_{VK} , de manera que nos indique que existe abollamiento, con la acción conjunta de σ_1 y τ , sin que ninguno de los dos actuando separadamente produzca abollamiento.

El coeficiente de seguridad a la abollamiento lo podemos referir a σ_{eq} : $\gamma_B = \frac{\sigma_{VK}}{\sigma_{eq}}$

Si $\gamma_B \leq 1$ se producirá la abollamiento de la placa.

Debe ser $\gamma_B \geq \gamma_{B adm}$, con lo cual se obtiene una placa con una adecuada seguridad a la abollamiento.

Según CIRSOC 302: $\gamma_{B adm} = 0.93 \cdot \gamma$

Ya vimos la fórmula de Euler para placas: $\sigma_e = 0.901 \cdot E \cdot \left(\frac{t}{b}\right)^2$

No debemos olvidar que esta fórmula se halló para un material "ideal" y por lo tanto la tensión de Euler es una tensión también ideal.

Otros casos de distinta sustentación y cargas se resuelven relacionando la tensión de Euler con un coeficiente o una función k :

$$\sigma_k = k \cdot \sigma_e$$

Esta tensión también es ideal ya que se basa en una tensión ideal σ_e .

Al estudiar la placa de Bryan obtuvimos que:

$$\text{para } \alpha \geq 1 : k = 4$$

$$\text{para } \alpha < 1 : k = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 \quad [\text{sale de Tabla 10 del CIRSOC 302}]$$

También dibujamos la familia de curvas correspondiente al caso de una carga tangencial uniformemente distribuida, con la que se puede hallar k en función de α .

Otros casos de cargas se han resuelto y se pueden leer en textos especializados en el tema de pandeo (Teoría de Estabilidad Elástica, de Timoshenko).

En la Tabla 10 de la DIN 4114 o en la Tabla 10 del CIRSOC 302, se hallan las fórmulas para cargas normales con ley de distribución lineal y para carga tangencial uniforme. Podemos de allí calcular:

$$\sigma_{1 ki} = k \cdot \sigma_e = \text{Tensión normal crítica ideal, o sea, tensión ideal de abollamiento.}$$

$\tau_{ki} = k \cdot \sigma_e =$ Tensión tangencial crítica ideal, o sea, tensión tangencial de abollamiento.

Cualquiera de las dos tensiones son de abollamiento, sin necesidad de la colaboración de la otra. Debemos ahora hallar un par de valores $\bar{\sigma}_1$ y de $\bar{\tau}$ tal que actuando en conjunto produzcan la abollamiento. Ninguno de los dos actuando por separado produce la abollamiento.

Definimos: $\bar{\xi} = \frac{\bar{\tau}}{\tau_{ki}}$ y $\bar{\eta} = \frac{\bar{\sigma}_1}{\sigma_{1ki}}$

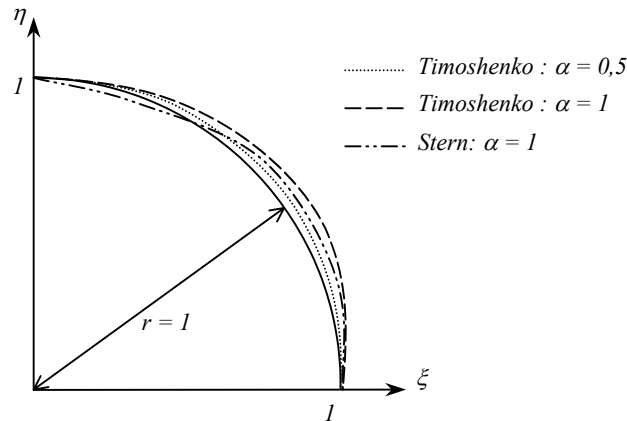
Si: $\bar{\sigma}_1 = 0$ resulta $\bar{\tau} = \tau_{ki}$ $\therefore \bar{\xi} = 1$
 $\bar{\eta} = 0$

Si: $\bar{\tau} = 0$ resulta $\bar{\sigma}_1 = \sigma_{1ki}$ $\therefore \bar{\xi} = 0$
 $\bar{\eta} = 1$

Si representamos los valores de $\bar{\eta}$ y $\bar{\xi}$ en un sistema de coordenadas $\bar{\xi} - \bar{\eta}$, la curva de variación pasará por los puntos ($\bar{\xi} = 0$; $\bar{\eta} = 1$) y por ($\bar{\xi} = 1$; $\bar{\eta} = 0$).

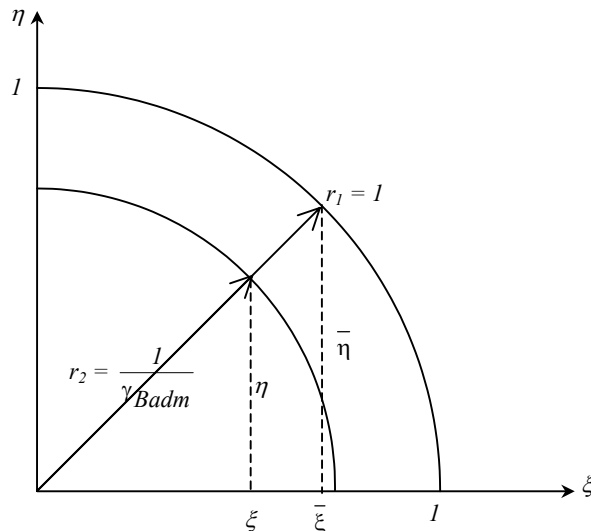
Timoshenko y Stern resolvieron el problema para casos particulares. Finalmente Chwalla lo resolvió en forma general. Timoshenko resolvió dos placas: con $\alpha = 0.5$ y $\alpha = 1$ y tensiones $\sigma_2 = \sigma_1$, con un valor de $\psi = -1$, y tensiones $\tau = cte$. Stern resolvió con otro método una placa con $\alpha = 1$;

$\sigma_2 = -\sigma_1$ y $\tau = cte$. Si representamos ambas soluciones en un gráfico, según coordenadas $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, obtendríamos curvas que difieren poco entre sí, y además son exteriores en su mayor parte, pero próximas a un círculo de radio unitario.



Dada la proximidad de las curvas, Chwalla adoptó como válido el círculo de radio unitario, por estar además del lado de la seguridad.

Todos los puntos situados sobre el círculo de radio unitario corresponden a tensiones que producen abollamiento en el estado de equilibrio indiferente. Todos los puntos situados sobre el exterior del círculo corresponden a tensiones mayores, o sea, producen abollamiento. Los puntos interiores corresponden a tensiones que no producen abollamiento, y de acuerdo a su distancia al círculo de radio unitario, con mayor o menor coeficiente de seguridad.



Determinemos ahora el radio r_2 del círculo que limita los puntos con coeficientes de seguridad $\gamma_B \geq \gamma_{Badm}$.

$$\frac{r_1}{r_2} = \gamma_{Badm} \Rightarrow \frac{l}{r_2} = \gamma_{Badm} \Rightarrow r_2 = \frac{l}{\gamma_{Badm}}$$

La ecuación del círculo de radio r_2 es:

$$\xi^2 + \eta^2 = \left(\frac{l}{\gamma_{Badm}} \right)^2 \quad (\text{ecuación de una circunferencia})$$

$$\gamma_{Badm} = \frac{l}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$$

Por semejanza:
$$\frac{\bar{\xi}}{l} = \frac{\xi}{\frac{l}{\gamma_{Badm}}} \Rightarrow \xi = \frac{\bar{\xi}}{\gamma_{Badm}} = \frac{\frac{\bar{\tau}}{\tau_{Ki}}}{\gamma_{Badm}} = \frac{\bar{\tau}}{\gamma_{Badm} \cdot \tau_{Ki}}$$

Como $\tau = \frac{\bar{\tau}}{\gamma_{Badm}} \Rightarrow \xi = \frac{\tau}{\tau_{ki}}$

En forma análoga:
$$\eta = \frac{\sigma_l}{\sigma_{lki}}$$

Los valores τ y σ_l corresponden a un par situado sobre un círculo de radio: $r_2 = \frac{l}{\gamma_{Badm}}$

Por lo que:
$$\gamma_{Badm} = \frac{l}{\sqrt{\left(\frac{\tau}{\tau_{ki}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{\sigma_{lki}} \right)^2}}$$

Los puntos interiores al círculo r_2 corresponden a radios menores a r_2 :

$$r = \frac{I}{\gamma_B}$$

Por lo que:
$$\gamma_B = \frac{I}{\sqrt{\left(\frac{\tau}{\tau_{ki}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_I}{\sigma_{Iki}}\right)^2}}$$

Para un par de valores de τ y de σ_I , hallamos γ_B , y si resulta $\gamma_B \geq \gamma_{Badm}$ estamos en buenas condiciones de seguridad a la abollamiento, siempre que las condiciones de la placa de Euler se cumplan. Es decir que debemos verificar si estamos en el campo elástico.

Por ello el cálculo del γ_B que hemos hecho no es correcto y se debe calcular como sigue:

$$\gamma_B = \frac{\sigma_{VK}}{\sigma_{eq}} = \frac{I}{\sqrt{\left(\frac{\tau}{\tau_{ki}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_I}{\sigma_{Iki}}\right)^2}}$$

Por lo que:
$$\sigma_{VK} = \frac{\sqrt{\sigma_I^2 + 3 \cdot \tau^2}}{\sqrt{\left(\frac{\tau}{\tau_{ki}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_I}{\sigma_{Iki}}\right)^2}} = \sigma_{VKi}$$

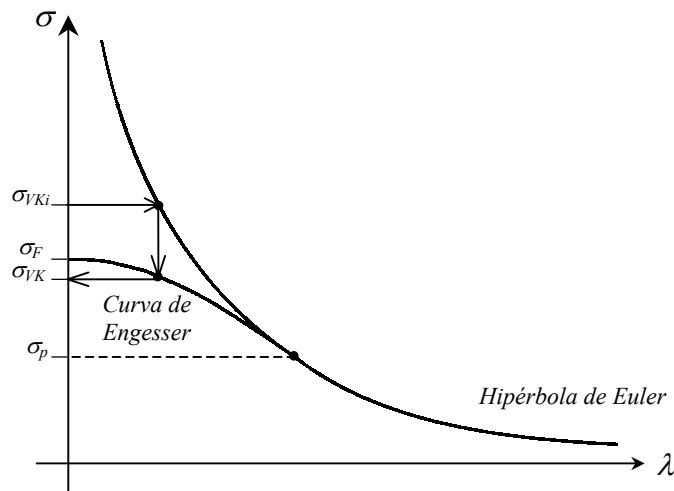
Ponemos σ_{VKi} ya que no sabemos si estamos en el campo elástico o no.

El reglamento CIRSOC define al coeficiente elástico con $\sigma_E = 0,8 \cdot \sigma_F$;

Para el acero tipo F-24 es $\sigma_E = 1920 \text{ kg/cm}^2$.

Si $\sigma_{VKi} \leq \sigma_E$ será: $\sigma_{VKi} = \sigma_{VK}$ por lo que: $\gamma_B = \frac{\sigma_{VK}}{\sigma_{eq}}$

Si $\sigma_{VKi} > \sigma_E$ debemos pasar de la hipérbola de Euler a la curva de Engesser, que gráficamente significa:



Esto se hace analíticamente por medio de la Tabla 11 del CIRSOC 302.
Obtenido de otra forma, σ_{VK} , se calcula:

$$\gamma_B = \frac{\sigma_{VK}}{\sigma_{eq}}$$

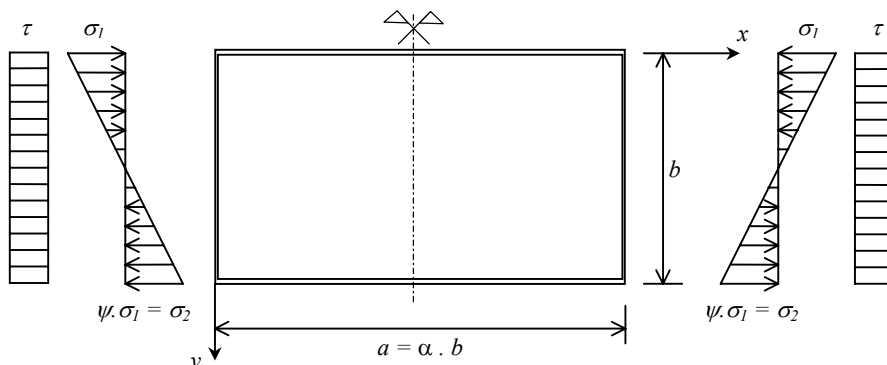
Si $\gamma_B \geq \gamma_{Badm}$ tenemos buenas condiciones a la abollamiento.

La ecuación general que dedujo Chwalla para los $\psi \neq -1$ ya no es un círculo, sino:

$$\left[\frac{1+\psi}{4} \cdot \eta + \sqrt{\left(\frac{3-\psi}{4} \cdot \eta \right)^2 + \xi^2} \right]^2 = \frac{I}{\gamma_B^2}$$

Por lo que: $\sigma_{VKi} = \frac{\sigma_{eq}}{\frac{1+\psi}{4} \cdot \frac{\sigma_I}{\sigma_{IKi}} + \sqrt{\left(\frac{3-\psi}{4} \cdot \frac{\sigma_I}{\sigma_{IKi}} \right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{Ki}} \right)^2}}$

En el caso concreto de una placa, el cálculo se realiza de la siguiente manera:



$$\sigma_e = 0,901 \cdot E \cdot \left(\frac{t}{b} \right)^2$$

De la Tabla 10 del CIRSOC 302, se obtiene el valor de k para σ y τ .

$$\sigma_{IKi} = k \cdot \sigma_e$$

$$\tau_{Ki} = k \cdot \sigma_e$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_I^2 + 3 \cdot \tau^2}$$

$$\sigma_{VKi} = \frac{\sigma_{eq}}{\frac{1+\psi}{4} \cdot \frac{\sigma_I}{\sigma_{IKi}} + \sqrt{\left(\frac{3-\psi}{4} \cdot \frac{\sigma_I}{\sigma_{IKi}} \right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{Ki}} \right)^2}}$$

Si $\sigma_{VKi} \leq \sigma_E = 0,8 \cdot \sigma_F$ tendremos $\sigma_{VK} = \sigma_{VKi}$

Si $\sigma_{VKi} > \sigma_E$ de Tabla 11, con σ_{VKi} saco σ_{VK}

$$\gamma_B = \frac{\sigma_{VK}}{\sigma_{eq}}$$

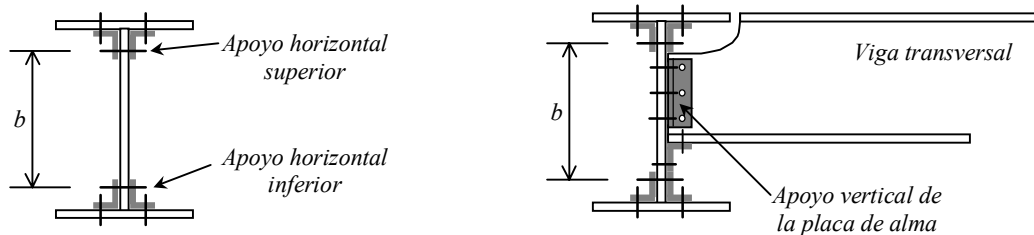
Si obtenemos un $\gamma_B \geq \gamma_{Badm}$ estaremos en Buenas Condiciones.

Si obtenemos un $\gamma_B < \gamma_{Badm}$ estaremos en Malas Condiciones.

RIGIDIZADORES

En el estudio de la abollamiento del alma de una viga se deben identificar las condiciones de sustentación de la misma. Tenemos al menos dos apoyos horizontales constituidos por las alas de la viga.

En circunstancias especiales se divide el alma por medio de la unión, a vigas transversales con coincidencia de las alas superiores, y tenemos divisorias verticales.

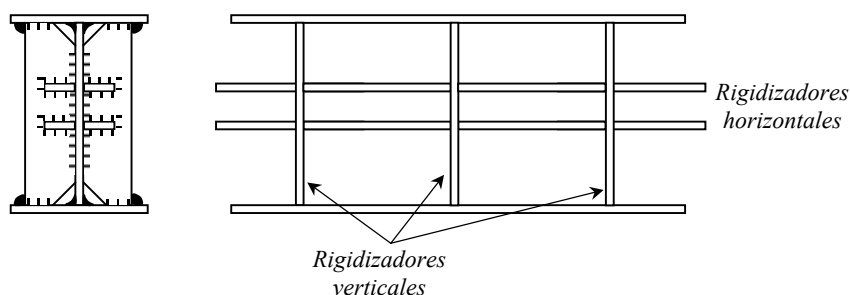


Queda así el alma subdividida en recuadros de longitud "a" y altura "b". Si no existen vigas transversales dispuestas en la forma vista, se recurre a perfiles "L" o bien planchuelas, que apoyadas en las alas, impiden total o parcialmente en ese lugar el desplazamiento por abollamiento del alma. Estos se denominan "rigidizadores" y tienen distintos diseños según sea una construcción remachada o bien soldadas.



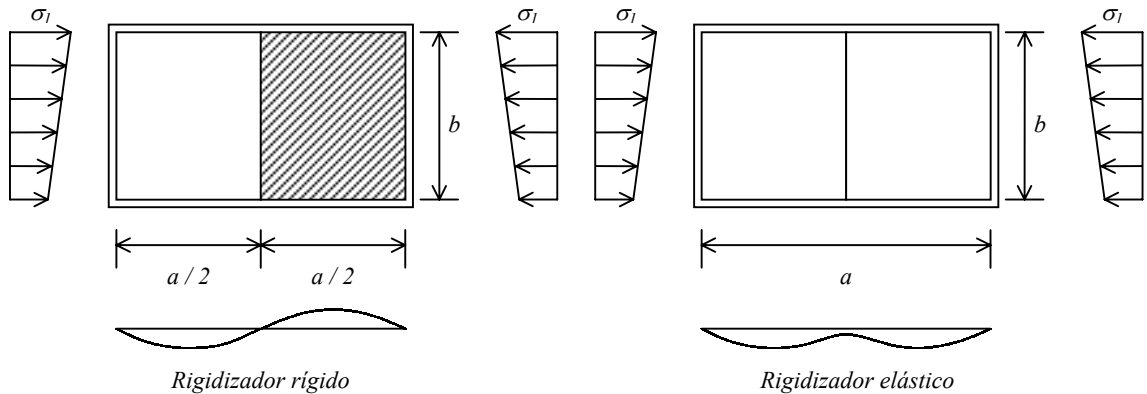
Es de buena práctica constructiva disponer de rigidizadores verticales en los puntos de aplicación de cargas verticales concentradas, especialmente si son valores importantes. Naturalmente esto se aplica a vigas armadas, ya que los perfiles laminados tienen sus partes constituyentes de buena rigidez.

Los rigidizadores generalmente son solo verticales, pero a medida que se va aumentando la altura de la viga, pueden disponerse rigidizadores horizontales en combinación con rigidizadores verticales. En los casos de almas excepcionalmente grandes se pueden disponer dos rigidizadores horizontales o bien si continuamos examinando las soluciones posibles, a medida que aumenta la altura del alma, se puede recurrir a un emparrillado de rigidizadores horizontales y verticales.



El cálculo de los rigidizadores, en sus diseños más comunes, se encuentra normalizado según CIRSOC 302 y 302-1. (Ver CIRSOC 302, 6.3, y CIRSOC 302-1, Capítulo 11).

Los rigidizadores pueden ser rígidos o elásticos. Los rígidos impiden la deformación por abollamiento en su unión con la chapa del alma. Los elásticos limitan la deformación sin anularla totalmente.



Para que un rigidizador pueda considerarse como "rígido" deberá tener un momento de inercia:

$$I \geq I^{(*)}$$

donde:

$$I^{(*)} = 0,092 \cdot \theta^{(*)} \cdot b \cdot t^3 \quad (\text{sale de página 78, capítulo 11, CIRSOC 302-1})$$

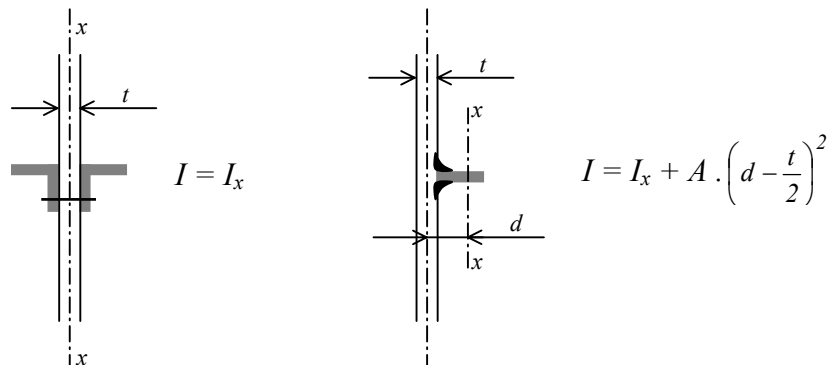
$\theta^{(*)}$ depende del tipo de carga, de $\alpha = a/b$, y en el caso de rigidizadores solicitados axialmente, de la

magnitud $\delta = \frac{A}{b \cdot t}$

donde:

A = sección bruta del rigidizador.

t = espesor de la chapa del alma.



Cuando se toma un rigidizador con $I \geq I^{(*)}$, la resistencia a la abollamiento de la placa de dimensiones $a \cdot b$ es la misma que la que aparece rayada en las figuras de la Tabla 9 de CIRSOC 302-1, o sea, en nuestro caso, una placa de dimensiones:

$$\left(\frac{a}{2}\right) \cdot b.$$

Los valores de $\theta^{(*)}$ se encuentran en la Tabla 9 de CIRSOC 302-1.

En el caso que se opte por rigidizadores elásticos, o sea, con $I < I^{*}$, se calcula:

$$\theta = \frac{I}{0,092 \times b \times t^3} \quad \delta = \frac{A}{b \cdot t}$$

y se verifica la seguridad a la abollamiento según 6.2 de CIRSOC 302.

$$\sigma_e = 0,901 \cdot E \cdot \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad ; \quad \sigma_{IKi} = k \cdot \sigma_e \quad ; \quad \tau_{Ki} = k \cdot \sigma_e$$

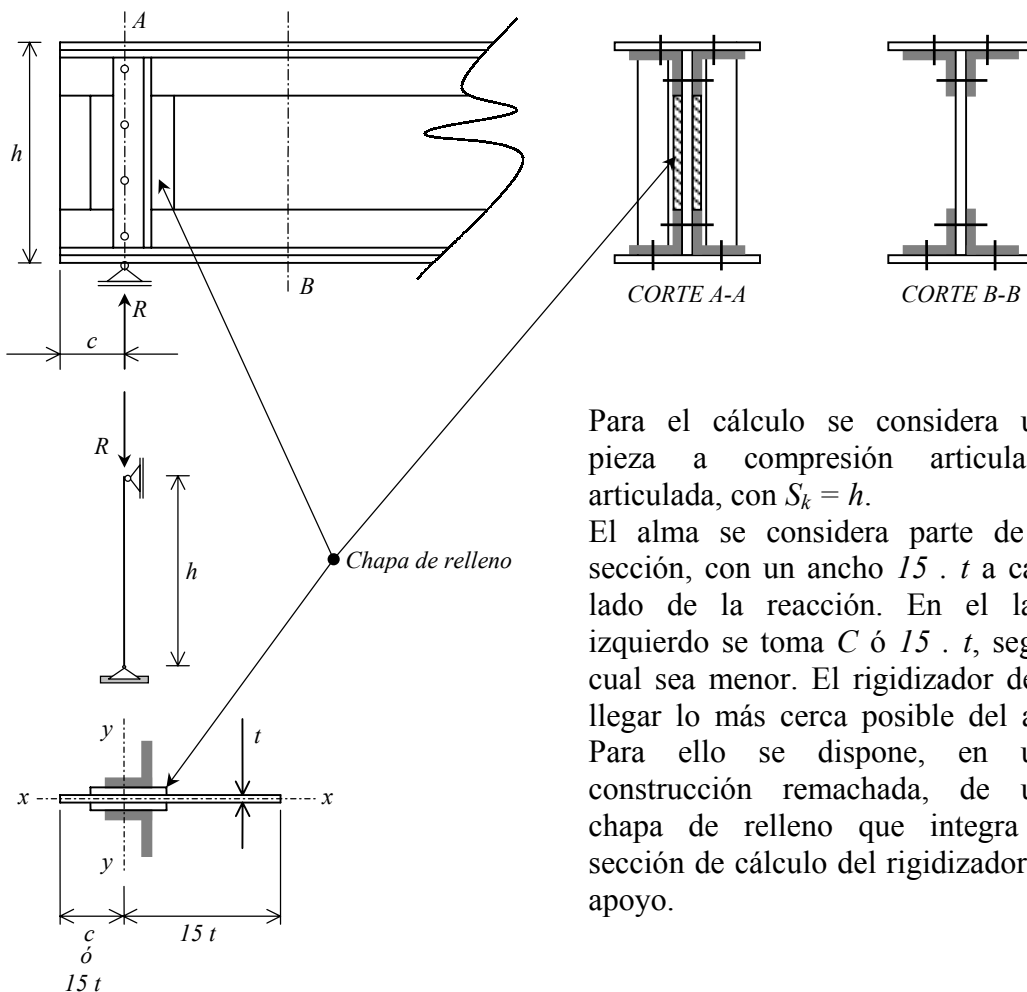
Los valores de k para σ_{IKi} y para τ_{Ki} se hallan ahora según la Tabla 10 del CIRSOC 302-1, página 88. Luego se halla σ_{VKi} según 6.2.3, y si corresponde $\sigma_{VKi} \rightarrow \sigma_{VK}$.

$$\gamma_B = \frac{\sigma_{VK}}{\sqrt{\sigma_f^2 + 3 \cdot \tau^2}}$$

Estaremos en Buenas Condiciones si se verifica que $\gamma_B \geq 0,93 \cdot \gamma$

a) Rigidizador de Apoyo

Como su nombre lo indica, es el que se dispone en los apoyos de las vigas armadas.



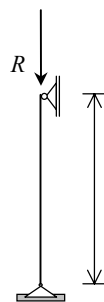
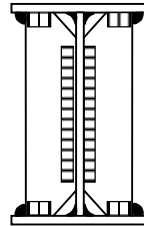
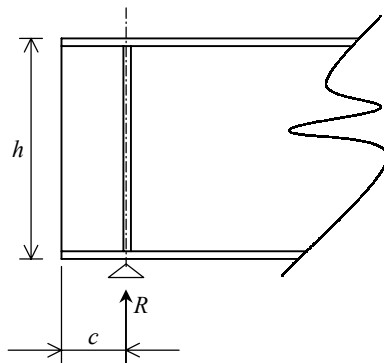
Para el cálculo se considera una pieza a compresión articulada-articulada, con $S_k = h$.


El alma se considera parte de la sección, con un ancho $15 \cdot t$ a cada lado de la reacción. En el lado izquierdo se toma C ó $15 \cdot t$, según cual sea menor. El rigidizador debe llegar lo más cerca posible del ala. Para ello se dispone, en una construcción remachada, de una chapa de relleno que integra la sección de cálculo del rigidizador de apoyo.

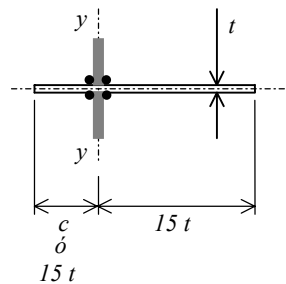
$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad ; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad ; \quad \lambda = \frac{h}{i_{min}} \rightarrow \omega$$

$$\sigma = \frac{\omega \cdot R}{A} \leq \sigma_{adm}$$

En una construcción soldada el detalle constructivo es más simple:



El rigidizador está compuesto por  dos planchuelas soldada al alma y a las alas de la viga.



Massonet

Massonet estudió los rigidizadores sobre la base de experiencias y consideró que para asegurar la indeformabilidad de los mismos hasta el colapso, se deben multiplicar los valores teóricos deducidos en la Tabla 9 del CIRSOC 302-1, por un coeficiente C .

De esta manera quedaría:

$$I^{(*)} = 0,092 \cdot \gamma^{(*)} \cdot b \cdot t^3 \cdot C \quad (\text{s/DIN 4114})$$

$$I^{(*)} = 0,092 \cdot \theta^{(*)} \cdot b \cdot t^3 \cdot C \quad (\text{s/CIRSOC 302-1})$$

C es un coeficiente que varía entre 3 y 6. Zignoli incluye en la página 761 de su libro, la Tabla 9 con el agregado de C .

El concepto de C de acuerdo a Massonet es el siguiente:

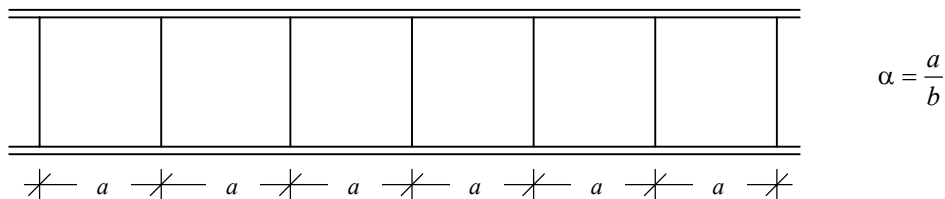
- 1) Se debe tener en cuenta, de alguna manera, con un coeficiente de mayoración, las imperfecciones geométricas normales en la construcción.
- 2) La teoría que da origen a $I^{(*)}$ se basa solamente en una resistencia elástica a la abollamiento sin tener en cuenta la resistencia post-crítica. Si queremos que los rigidizadores sean efectivos, también en esta fase post-crítica debemos incrementar los valores de $I^{(*)}$.

Refiriéndonos al número de línea de la Tabla 9:

- $C = 3$ para línea N° : 1,3,4,5,7,8,9,12,13,14,15.
- $C = 4$ para línea N° : 2,10.
- $C = 6$ para línea N° : 6,11.

[los coeficientes C corresponden al Zignoli, y los N° de línea a la Tabla 9 del CIRSOC 302-1]

Para una viga infinitamente larga (infinito "técnico", no matemático), con rigidizadores verticales equidistantes y α entre 0.2 y 1, Massonet propone:



Para $0.2 < \alpha < 1$:

$$\theta^{(*)} = \frac{28}{\alpha} - 20.\alpha \quad (\text{Massonet})$$

Para este caso propone además un $C = 3$.

Si $\alpha > 1$: $\theta^{(*)} = 8$.

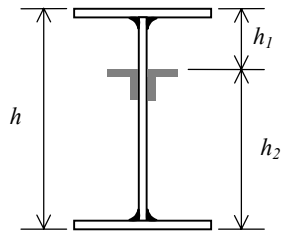
Rigidizadores Horizontales

Se pueden calcular según el CIRSOC y mayorarlos con el coeficiente C .

Criterios de diseño:

- $\frac{h}{t} > 150$ y $h < 2 m$ *Se usan solo rigidizadores verticales.*
- $\frac{h}{t} > 150$ y $5 m > h > 2 m$ *Se usan rigidizadores verticales y un rigidizador horizontal.*
- $\frac{h}{t} > 150$ y $h > 5 m$ *Se usan rigidizadores verticales y dos horizontales.*

Estos rigidizadores se ubican entre 0,2 y 0,3 de la altura medida desde el borde comprimido.



$$\frac{h_1}{h} = 0,2 \approx 0,3$$

Rigidizadores verticales para almas con 1 (uno) o 2 (dos) rigidizadores horizontales

Mele propone los siguientes valores de θ^* :

	$\alpha = 0,7$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1,5$	$\alpha = 2$
• Un (1) rigidizador horizontal	$\theta^* = 60$	$\theta^* = 60$	$\theta^* = 12$	$\theta^* = 12$
• Dos (2) rigidizadores horizontales	$\theta^* = 40$	$\theta^* = 28$	$\theta^* = 28$	$\theta^* = 28$