

TEMA III

PANDEO EN EL CAMPO PLASTICO

1.- INTRODUCCION

Para interpretar las teorías que expondremos más adelante, repasaremos los conocimientos sobre el diagrama  $\sigma-\epsilon$  de un material dúctil, tal como el acero F-24<sup>(1)</sup>.

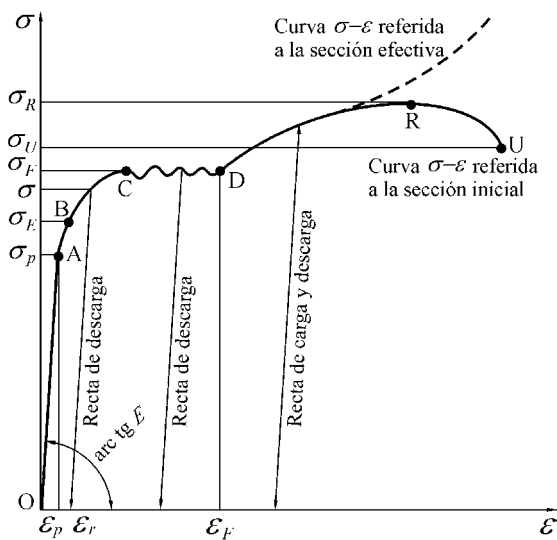


Fig. 1

Se utilizará el diagrama  $\sigma-\epsilon$  del ensayo de tracción del acero (Fig. 1) para la determinación de las tensiones de flexión.

El diagrama  $\sigma-\epsilon$  se ha dibujado con deliberadas exageraciones a los efectos de una mayor claridad conceptual.

Al traccionar una barra recta con una carga  $P$  se puede, con los distintos aumentos de ésta, ir registrando las diferentes tensiones y deformaciones cuyos valores son:

$$\sigma = \frac{P}{F} \quad \text{y} \quad \epsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Donde:

- $\sigma$  = tensión de tracción.
- $P$  = carga de tracción.
- $F$  = área de la sección normal a la barra.
- $\epsilon$  = deformación específica producida por  $P$ .
- $\Delta l$  = alargamiento producida por  $P$ .
- $l$  = longitud de la barra cuando  $P = 0$ .

La relación entre  $\sigma$  y  $\epsilon$  es lineal, con un coeficiente constante llamado **módulo de elasticidad**  $E$ , que está representado por la siguiente expresión:

$$E = \text{arc tg } E = 2.100.000 \text{ Kg/cm}^2$$

La ley de Hooke está dada por:

$$\sigma = E \cdot \epsilon \tag{1}$$

<sup>(1)</sup> Ver CIRSOC 301.

Esta relación lineal se mantiene hasta un valor determinado OA y este valor, es el límite de la **tensión de proporcionalidad**  $\sigma_p$ . Para  $\sigma \leq \sigma_p$  se puede aplicar la ley de Hooke o de linealidad de tensiones y deformaciones. No obstante, al seguir incrementando la carga  $P$ , los alargamientos también aumentan, pero no proporcionalmente. Al desaparecer la carga, la barra se descarga según la “recta de descarga” BAO y queda con sus dimensiones iniciales, es decir, los alargamientos no son permanentes, esto es válido siempre y cuando las tensiones no sobrepasen el valor de  $\sigma_E$  llamado **límite elástico**, en cuyo caso, para  $\sigma < \sigma_E$  no quedan deformaciones residuales.

Si en la zona  $\sigma_E < \sigma < \sigma_F$  empezamos a disminuir  $\sigma$ , la relación entre  $\sigma$  y  $\varepsilon$  vuelve a ser lineal y tenemos lo que se denomina “recta de descarga”, que es paralela a la “recta de carga” que tenemos para  $0 < \sigma < \sigma_p$ . Es decir que, aún en la zona plástica o anelástica, cuando descargamos la barra el material se comporta (en esa descarga) de acuerdo a la ley de Hooke o sea  $\sigma = E \cdot \varepsilon$ . Eso sí, la barra queda con una deformación permanente o residual cuyo valor está dado por:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta l_r}{l}$$

Si volvemos a cargar la barra, el material se comporta como si tuviera memoria y la relación  $\sigma$ - $\varepsilon$  se da de acuerdo a la recta de descarga y, por lo tanto, es como si aumentara el valor de la tensión de proporcionalidad  $\sigma_p$ .

Cuando se llega a  $\sigma_F$  estamos en lo que se llama la **tensión de fluencia** (línea CD) y el material fluye, es decir, se deforma casi sin aumento de la tensión hasta una deformación específica  $\varepsilon_F$ . A partir de allí para lograr una mayor deformación se debe aumentar la carga.

Para  $\sigma > \sigma_F$  si descargamos, la relación  $\sigma$ - $\varepsilon$  en este proceso se realiza mediante la recta de descarga y, si volvemos a cargar la barra, la relación  $\sigma$ - $\varepsilon$  se da sobre la misma recta de descarga, que ahora podemos llamar recta de “carga-descarga”.

A partir del límite de fluencia el material se comporta de una manera distinta, es como si se hubiera consolidado, volviéndose más frágil y adquiriendo una nueva resistencia. Si a partir de aquí, aumentamos la carga, en algún punto de la barra se produce una fuerte estricción o estrechamiento de la sección y finalmente se rompe. Durante el proceso de estricción la carga baja considerablemente alcanzándose la rotura de la probeta para una tensión  $\sigma_U$  inferior a  $\sigma_R$ .

Se toma como tensión de rotura  $\sigma_R$  a la máxima tensión alcanzada sobre la base de la sección inicial. Asimismo, si consideramos en cada instante la sección efectiva de la probeta, el tramo CR se levantaría ligeramente y el tramo RU sería notablemente ascendente.

En el campo plástico o anelástico, tenemos que  $\sigma > \sigma_p$  y la relación entre tensión y deformación se determina mediante una fórmula distinta a la Ec. (1), que veremos más adelante y que expresa la relación  $\sigma$ - $\varepsilon$  para  $\sigma_p < \sigma < \sigma_F$ .

Para los temas a desarrollar es importante recordar que, cuando descargamos un material que estaba cargado con  $\sigma > \sigma_p$ , la descarga se produce según la recta de descarga paralela a la recta de carga.

## 2.- TEORIA DE EULER

El pandeo, que hemos denominado de Euler, parte de la suposición de dos hipótesis: una geométrica y la otra mecánica.

- a) La **geométrica** tiene como hipótesis:
- ✓ A una barra simétrica y perfectamente recta.
  - ✓ La barra es perfectamente centrada.
  - ✓ La carga es colineal con el eje de la barra.
- b) La **mecánica** tiene como hipótesis:
- ✓ Isotropía y homogeneidad del material.
  - ✓ Validez de la ley de Hooke en forma indefinida, las tensiones son proporcionales a las deformaciones, siempre y cuando, se esté dentro de la zona de proporcionalidad en el diagrama tensión–deformación.
  - ✓ Validez de la hipótesis de Bernoulli (las secciones se mantiene planas después de las deformaciones, aún el campo plástico).

En otras palabras, se coloca a la barra en condiciones ideales, tales que: ni el material, ni las formas de los elementos, ni la disposición de la carga pueden satisfacer. Por ahora, vamos analizar solamente el comportamiento del material, suponiendo que se sigan cumpliendo todas las premisas teórica de Euler.

De acuerdo al diagrama  $\sigma$ - $\varepsilon$ , el material sigue la ley de Hooke en una fase muy limitada, la zona  $OA_{\varepsilon_p}$  de la Fig. 1. A la carga que actúa dentro de esta zona se la conoce como **carga crítica ideal de pandeo**  $P_{Ki}$ , también llamada **carga crítica ideal de Euler**. Es ésta la carga correspondiente al límite de estabilidad elástico, obtenida bajo la hipótesis de que el material obedece ilimitadamente a la ley de Hooke.

Para una barra articulada–articulada este valor de la carga crítica ideal de Euler está dada por:

$$P_{Ki} = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot E \cdot I = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot B$$

Donde la rigidez de la pieza es:  $B = E \cdot I$ .

La tensión crítica ideal de Euler será:

$$\sigma_{Ki} = \frac{P_{Ki}}{F} = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot \frac{E \cdot I}{F} = \frac{\pi^2}{\left(l/\sqrt{I/F}\right)^2} \cdot E$$

El radio de giro es:  $i = \sqrt{\frac{I}{F}}$

$$\sigma_{Ki} = \frac{\pi^2}{(l/i)^2} \cdot E$$

Si llamamos esbeltez de la pieza a:  $\lambda = \frac{l}{i}$

Tendremos que la tensión crítica ideal de Euler será:

$$\sigma_{Ki} = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \cdot E \tag{2}$$

Esta expresión es la llamada hipérbola cuadrática de Euler, que data de 1744, la que fue largamente discutida porque no se observa una coincidencia entre la teoría y la experiencia. Debido a que los materiales y, sobre todo, las barras cargadas de punta no cumplían con las condiciones hipotéticas establecidas por Euler, porque ni las barras son de material totalmente homogéneo, ni son enteramente rectas, ni centradamente cargadas, ni ilimitadamente elásticas. Por estas causas, se acudió a teorías basadas casi siempre en la suposición de tener la pieza con excentricidades iniciales y, con pequeñas variantes, aparecieron las expresiones semi-empíricas de Navier, Shnarz y Rankine, donde se trataba, en general, como ecuación la siguiente:

$$P_{adm} = \frac{F \cdot \sigma_{adm}}{1 + \kappa \cdot \lambda^2}$$

Donde  $\kappa$  es un coeficiente de reducción que depende del material.

Navier (en 1826) en sus estudios había indicado que, para barras cortas, la carga crítica de Euler no coincidía con la realidad, no sucediendo así en barras largas y rectas, con cargas bien centradas y de buena homogeneidad. En efecto, partiendo de la ecuación de Euler, Ec. (2), podemos apreciar lo expuesto por Navier. Tomando para  $E$  el valor de 2.100.00 Kg/cm<sup>2</sup> obtendremos la siguiente tabla ideal de pandeo:

$$\sigma_{Ki} = \frac{2.100.000 \cdot 3,1416^2}{\lambda^2}$$

$\lambda$	$\sigma_{Ki}$
20	51.815
30	23.029
40	12.954
50	8.290
60	5.757
70	4.230
80	3.238
90	2.559
100	2.073
103,898	1.920
110	1.713
120	1.439
130	1.226
140	1.057
150	921

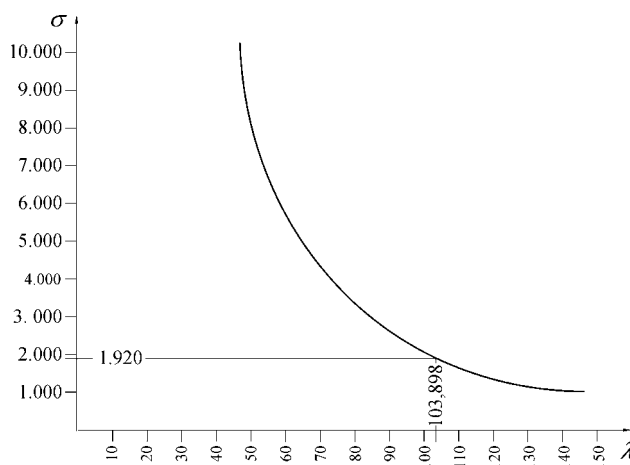


Fig. 2

Se aprecia en la tabla y en la Fig. 2 que la tensión crítica teórica  $\sigma_{Ki}$  para  $\lambda = 20$  alcanzaría la tensión crítica de pandeo de Euler a los 51.815 Kg/cm<sup>2</sup>. Pero, como el material F-24 que estamos estudiando, entra en fluencia a  $\sigma_F = 2.400$  Kg/cm<sup>2</sup>, la validez de la hipérbola de Euler tiene que hallarse forzosamente por debajo de este valor.

Las reglamentaciones adoptan como tensión de proporcionalidad a:

$$\sigma_p = 0,80 \cdot \sigma_F = 0,80 \cdot 2400 = 1.920 \text{ Kg/cm}^2$$

correspondiéndole en la hipérbola de Euler el valor de:

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{3,1416^2 \cdot 2.100.000}{0,80 \cdot 2.400}} = 103,898$$

Por lo ante expuesto podemos deducir que, para barras perfectamente rectas, cargadas centradamente y de constitución homogénea, la hipérbola de Euler será realmente válida sólo en la zona de  $\lambda \geq 103,898$ . Para valores menores, el material entra en el campo plástico, por lo tanto, no es válida la hipérbola cuadrática de Euler ni tampoco lo es el método de cálculo de Euler.

### 3.- TEORIA DE NAVIER y TETMAJER

Navier fue el primero que hizo notar que, por arriba de la tensión de proporcionalidad  $\sigma_p$ , no se cumplía la hipérbola de Euler, por ello dio la ecuación de una recta a utilizar en estos casos:

$$\sigma_{Kr} = 3,00 - 0,012 \cdot \lambda \text{ (tn/cm}^2\text{)}$$

mientras que Tetmajer encontró, después de sus series de ensayos cuidadosamente realizados, la ecuación de una recta casi coincidente:

$$\sigma_{Kr} = 3,00 - 0,0129 \cdot \lambda \text{ (tn/cm}^2\text{)}$$

demostrando con ello que, el error cometido por Navier era muy pequeño frente al valor dado por Tetmajer, sin embargo, hasta las experiencias de este último no se cambiaron las fórmulas de Rankine y de otros autores que daban valores similares.

La recta de Tetmajer fue modificada por las normas DIN, adoptando:

$$\sigma_K = 3.100 - 11,40 \cdot \lambda \text{ (Kg/cm}^2\text{)}$$

$$\text{Para } \sigma = \sigma_p = 1.900 \text{ Kg/cm}^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_p = \frac{3.100 - 1.900}{11,40} = 105$$

En la antigua normas DIN 1935 se tomaron las siguientes ecuaciones para el diagrama  $\sigma_K, \lambda$ :

En la fase elástica	Hipérbola de Euler	Para $\lambda \geq 105$	$\sigma_K = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot E$
En la fase plástica	Recta de Tetmajer	Para $60 < \lambda < 105$	$\sigma_K = 3.100 - 11,40 \cdot \lambda$
	Recta horizontal constante	Para $0 < \lambda < 60$ Limitación Reglamentaria	$\sigma_K = 2.400 \text{ Kg/cm}^2$

Estas tensiones se representan en la Fig. 3.

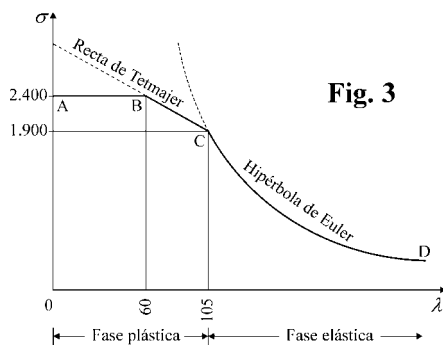


Fig. 3

Este método de operar tenía el mérito de su simplicidad, aparte de que las normas se mantenían por debajo de los valores obtenidos experimentalmente. Sin embargo con el transcurso del tiempo, se observaron algunas fallas más bien conceptuales, como las siguientes:

- ✓ En B no había una continuidad entre las rectas AB y BC.
- ✓ En C no se produce una tangencia entre la recta de Tetmajer BC y la hipérbola de Euler CD.

Teóricamente este hecho se consideró como una discrepancia que no podía admitirse frente a la continuidad de la materia, en otras palabras, la zona plástica presenta una discontinuidad en el punto C con la zona elástica. Ambas funciones, la hipérbola y la recta, tenían que empalmarse naturalmente, con continuidad, correspondiéndole para ello en el punto de transición C, una tangente.

El otro defecto del método consistía en la forma como se había establecido todo el campo plástico, que no coincidía, con una moderna teoría del concepto de seguridad de las piezas.

Todo ello condujo a una revisión total del método, con la ventaja de que ya existía, desde años atrás, una teoría totalmente desarrollada, cuya persistencia en mantener el método de Tetmajer y la DIN 1935, sólo se debía a la rutina y al afán de no innovar, que existe en toda comisión reglamentaria, sobre todo cuando se tenía el peso de miles de experiencias y trabajos realizados sobre la base de la labor de Tetmajer, sin que se produjeran inconvenientes de orden técnicos.

Finalmente, después de la guerra, se añadieron dos motivos más a los ya expuestos, los que llevaron a la revisión del reglamento. Ambos eran de orden económico, por un lado lograr estructuras lo más económicas posibles, aún reduciendo el coeficiente de seguridad; y por el otro, la aparición del hormigón, que empezó a invadir el campo de aplicación del acero tratando de desplazarlo, lo que desde luego, fue otro incentivo para pensar en el cambio de reglamento, buscando un mejor aprovechamiento del acero en una forma más racional y económica viable.

### 4.- PRIMERA TEORIA DE ENGESSER O TEORIA DEL MODULO TANGENTE

Fue Engesser el primero en formular una teoría en la fase plástica de pandeo en 1889, cambiándola luego en 1895.

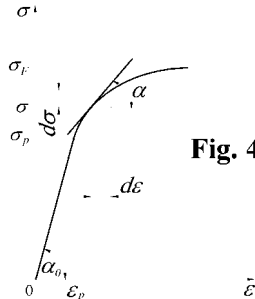


Fig. 4

Engesser, en su primera teoría, prescinde de la validez de la ley de Hooke en forma ilimitada y toma como válida el resto de las hipótesis de Euler, es decir, que –en vez de utilizar el módulo de elasticidad  $E$  constante– propone el empleo de un módulo de elasticidad tangente o instantáneo  $E_t$  (Fig. 4) cuyo valor es:

$$E_t = \text{arc tg } \alpha = \frac{d\sigma}{d\epsilon} \tag{3}$$

Este valor de  $E_t$  es variable según el valor de la tensión  $\sigma$  y varía entre la tensión de proporcionalidad  $\sigma_p$  y la tensión de fluencia  $\sigma_F$ .

Supongamos aplicar, a la barra ideal, una carga centrada de punta, creciente y que se mantiene recta, aún al superarse la fase elástica del material. A esta carga la seguimos aumentando hasta llegar al instante justo en que la barra comienza a arquearse con pandeo infinitesimal, en ese instante se suspende la carga. A la carga que produce este efecto la denominamos **carga de pandeo en el campo plástico**. Engesser tomó la ecuación de Euler y la generalizó, quedando la tensión crítica de pandeo  $\sigma_K$  (válida para  $\sigma > \sigma_p$ ) de acuerdo a la expresión siguiente:

$$\sigma_K = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \cdot E_t \tag{4}$$

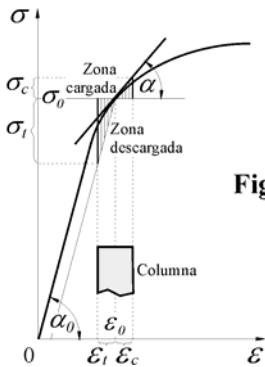


Fig. 5

Esta teoría fue criticada por Karman, porque objetaba el empleo de un solo módulo  $E_t$  en la zona de tensiones críticas mayores que  $\sigma_p$  (Fig. 5) ya que, al producirse flexión por pandeo en la zona interna –a la derecha– de la curva elástica, ésta se sobrecarga con tensiones de flexión por compresión. De allí que se acepta como válida la relación:

$$\sigma_c = E_t \cdot \epsilon_c \tag{5}$$

En cambio en la zona externa –a la izquierda– de la curva elástica, se produce una descarga de tensiones de flexión por tracción, pero allí la relación tensión–deformación se regirá por el módulo de descarga o módulo inicial, es decir, es válida la relación:

$$\sigma_t = E_0 \cdot \epsilon_t \tag{6}$$

En otras palabras, el material que inicialmente era homogéneo, se comporta, en este momento como heterogéneo, con la aplicación de los dos módulos, siendo:

- tg  $\alpha_0 = E_0 = E$
- tg  $\alpha = E_t$
- $\sigma_0$  y  $\epsilon_0$  es la tensión y deformación unitaria en la barra .

Por ser  $E_t$  variable con  $\sigma$  es de difícil aplicación la fórmula que determinó Engesser, Ec. (4). Como primer paso se debe definir la curva  $\sigma-\varepsilon$  a partir de los ensayos de tracción del acero. Entonces se puede hallar  $E_t$  para cada valor de  $\sigma$  midiendo gráficamente el ángulo, y luego se tendrá  $E_t = \text{tg } \alpha$ .

En vez de utilizar este método gráfico, se puede definir una función  $\sigma-\varepsilon$  que represente a la curva definida anteriormente y luego hallamos  $E_t = d\sigma / d\varepsilon$ , o sea, tenemos una función  $\sigma-E_t$ , con lo que hallamos  $E_t$  para cada valor de  $\sigma$  analíticamente.

Las funciones  $\sigma-\varepsilon$  y  $\sigma-E$  se pueden representar en un solo gráfico, Fig. 6.

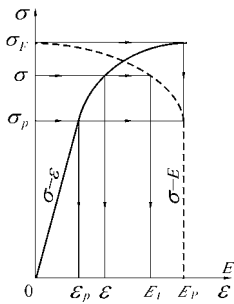


Fig. 6

Para  $\sigma = \sigma_p \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_p \Rightarrow E_t = E_p = 2.100.00 \text{ Kg/cm}^2$

Para  $\sigma = \sigma_F \Rightarrow \varepsilon \cong \infty \Rightarrow E_t = 0$

Para  $\sigma_p < \sigma < \sigma_F \Rightarrow \varepsilon, \text{ se calcula} \Rightarrow E_t, \text{ se calcula}$

### 4.1.- Métodos de cálculos



Fig. 7

Datos:

$$P, \quad l, \quad \beta \quad \text{y} \quad s_k = \beta \cdot l$$

Los lados de la sección rectangular son:  $a$  y  $b = k \cdot a$

$\beta$  es un coeficiente que depende del tipo de vinculación de la barra.

La incógnita será  $a$ , para que  $P$  sea una carga con un adecuado coeficiente de seguridad.

#### 4.1.1.- Métodos por iteraciones sucesivas

Se calcula:

$$F = a \cdot b = a \cdot k \cdot b \quad ; \quad i = \sqrt{\frac{I}{F}} \quad ; \quad \sigma = \frac{P}{F} \leq \sigma_{adm}$$

El coeficiente de seguridad  $v_{K adm}$  debe ser:



$$\frac{\sigma_{K1}}{\sigma} \geq v_{K adm} \quad \therefore \quad \sigma_{K1} \geq \sigma \cdot v_{K adm}$$

con  $\sigma_{k1}$  obtengo  $E_t$  y puedo aplicar la fórmula de Engesser

$$\sigma_{K2} = \left( \frac{\pi}{\beta \cdot l/i} \right)^2 \cdot E_t$$

Si se llega a que  $\sigma_{K1} = \sigma_{K2}$ , tenemos que la sección adoptada se halla en buenas condiciones de seguridad al pandeo. De lo contrario, se adopta otra sección y se repite el cálculo anterior hasta conseguir que  $\sigma_{Kn} = \sigma_{Kn+1}$ . Este método de resolución, por ser iterativo, es laborioso.

#### 4.1.2.- Métodos por tabulación

Aplicamos:

$$\sigma_K = \left( \frac{\pi}{\lambda} \right)^2 \cdot E_t \quad \therefore \quad \lambda = \frac{\beta \cdot l}{i} = \pi \cdot \sqrt{\frac{E_t}{\sigma_K}}$$

Para cada valor de  $\sigma_K$  le corresponde un valor de  $E_t$ . Hacemos la siguiente tabla:

$\sigma_K$	$\pi \cdot \sqrt{\frac{E_t}{\sigma_K}} = \frac{\beta \cdot l}{i}$
→	→

Adoptamos un valor de  $\sigma_K$  y vamos a la tabla, en donde hallamos  $\beta \cdot l/i$ , con el valor de  $i$  determinamos la sección:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \sigma_{adm} \quad \text{donde debe ser} \quad \frac{\sigma_K}{\sigma} \geq v_{K adm}$$

Se va iterando hasta que se cumplan ambas desigualdades. Es decir, se adopta otro  $\sigma_K$  y se deduce otra sección, y así se calcula

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \sigma_{adm} \quad \text{y} \quad \frac{\sigma_K}{\sigma} \geq v_{K adm}$$

La iteración termina cuando  $\frac{\sigma_K}{\sigma} \geq v_{K adm}$ .

En cuando al coeficiente de seguridad  $v_{K adm}$ , no se estableció su valor porque esta teoría no fue nunca reglamentada. Se verá más adelante la deducción que hace la DIN 4114 sobre el  $v_{K adm}$  correspondiente a la segunda teoría de Engesser, con un concepto totalmente diferente y que varía entre 1,71 y 2,50, según sea la esbeltez  $\lambda$ .

## 5.- SEGUNDA TEORIA DE ENGESSER O TEORIA DE ENGESSER KARMAN O TEORIA DEL DOBLE MODULO

El motivo de la crítica consistía en que, si se carga una barra cualquiera a la tracción por arriba del  $\sigma_p$  hasta N, según Fig. 8 (a), la barra –al descargarse totalmente– no sigue en su descarga a la línea OAN que se obtuvo durante la carga, sino que sigue la recta NB, prácticamente paralela a la fase elástica de carga del diagrama  $\sigma-\varepsilon$ .

Si analizamos una barra comprimida con una carga  $P$  hasta el punto N, veremos que mientras la barra se mantenga recta, la compresión será constante en toda su sección. Pero, si seguimos aumentando la carga hasta el instante en que la barra comienza a pandear, en la parte izquierda se produce una disminución de la compresión, o sea, un efecto de descarga por los alargamientos producidos en las fibras externas, Fig. 8 (b). Este efecto, aliviará la compresión alcanzada en las fibras exteriores de la sección N y, se comprende entonces, que un criterio tan simple como el de la ecuación de la primera teoría de Engesser no ser aplicable ya.

La nueva teoría de Engesser contempla estos efectos de descarga y Von Karman comprobó experimentalmente su validez.

Esta teoría está basada en la hipótesis de Bernoulli, extendida a las deformaciones anelásticas, es decir, admite que aún dentro del campo plástico las secciones se mantienen planas después de las deformaciones. Ensayos posteriores demostraron que esta validez es aceptable también para materiales no homogéneos, como el hormigón.

Si a una barra recta y de poca esbeltez, se le hace crecer centradamente la carga, la barra aumentará su deformación elástica, hasta un límite tal que sus tensiones superan las de proporcionalidad. Sabemos ya que, si antes de alcanzar las tensiones de proporcionalidad, con el aumento de la carga de compresión se llega a un valor infinitesimal menor que el valor de la carga crítica, y en este instante se detiene el crecimiento de la carga aplicando una pequeña y despreciable carga perturbatriz normal al eje de la pieza, esta se arquea. Cuando este efecto transversal desaparece, la flexión producida queda automáticamente eliminada y la barra vuelve a su conformación recta original.

Las cosas suceden de distinta manera cuando se detiene el proceso de incremento de la carga en el campo plástico, un instante antes de alcanzarse la carga crítica. Ahora la perturbación transversal despreciable flexiona la barra, pero al desaparecer la causa perturbante la barra no retorna a su anterior conformación recta de equilibrio, sino que, queda con una deformación plástica residual menor que la que produjo la perturbación.

Esta diferencia de comportamiento, antes de que la barra alcance la carga crítica cuando estamos en el campo elástico y plástico, es una característica fundamental de ambas fases. El fenómeno descrito anteriormente en el campo plástico, no debe confundirse con el punto crítico en este mismo campo, porque éste aún no ha sido alcanzado. La barra tendrá la carga crítica en el campo plástico cuando la carga perturbatriz produzca una flexión tal que, siendo la barra descargada, ésta no experimente ningún retorno en la deformación plástica producida. Desde luego, un incremento de la carga por encima de la carga crítica, hará que la barra se pliegue o se destruya totalmente, dependiendo de una u otra cosa del material ensayado.

Por arriba de la carga crítica hay equilibrio plástico inestable. La notación de la carga crítica en la fase elástica, cuando la barra se ha supuesto en condiciones ideales se denomina, con

$P_{Ki}$  y, en el campo plástico con barras y cargas ideales determinadas según el método de Engesser–Karman, se lo indica con  $P_K$ .

La teoría de Engesser–Karman se funda en que, al alcanzarse la carga crítica en el campo plástico, las deformaciones anelásticas producidas son elementales, no debiendo confundirse con el caso de flexo–compresión común. Se trata en cambio, de una flexo–compresión plástica con excentricidad o flexión infinitesimal, al igual de lo que se supone para el cálculo del pandeo de Euler en la fase elástica del material.

Consideraremos ahora el fenómeno en el campo plástico y en el punto crítico, es allí donde detenemos el proceso de incremento de la carga cuando se llega al valor de  $P_K$ , a fin de estudiar lo que sucede.

Partiendo de la primera teoría de Engesser, Von Karman desarrolló la teoría del doble módulo, a fin de dar satisfacción a las críticas que teóricamente eran razonables y que se expusieron en los párrafos anteriores.

Como siempre, suponemos que la barra se halla cargada con una carga centrada y que se produce una flexión por una fuerza perturbadora que luego desaparece.

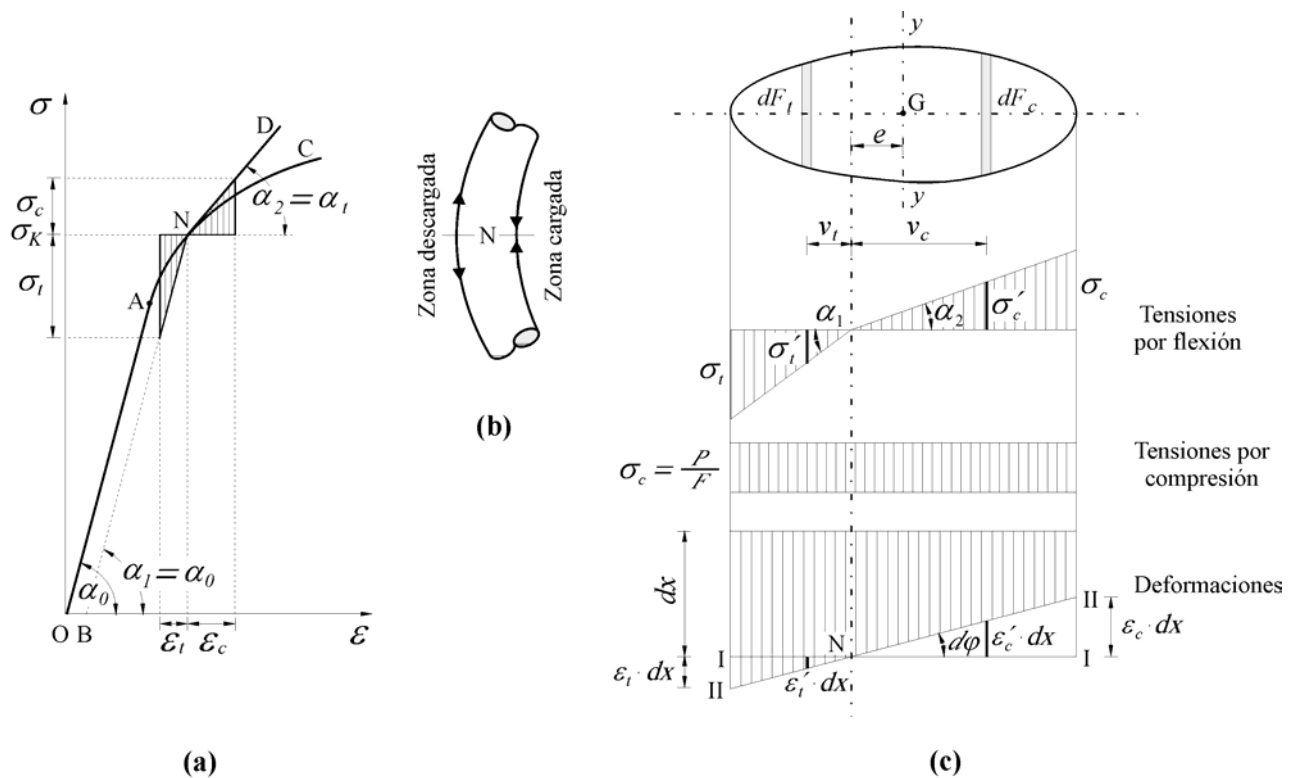


Fig. 8

La sección I-I (por Bernoulli) rota con un eje en  $N$  a la posición II-II, Fig. 8 (c). Esto hace que las fibras externas (a la izquierda) se descarguen según una paralela a la recta de proporcionalidad  $OA$ , Fig. 8 (a), a una distancia  $\epsilon_l$  del eje neutro y que la tensión  $\sigma_K$  se descargue en un valor  $\sigma_l$ . Correspondientemente, las fibras externas (a la derecha) sufren, a una distancia  $\epsilon_c$  de la fibra neutra, un aumento de compresión que vale  $\sigma_c$ .

Como se aprecia en la Fig. 8 (a), mientras que en las fibras externas de la derecha el aumento de las tensiones siguen la ley de tensión–deformación ( $\sigma-\varepsilon$ ) según la curva NC, las fibras externas de la izquierda siguen la recta de descarga NB. Para la abscisa  $\varepsilon_t$  la tensión de descarga se calcula con la ecuación  $\sigma_t = E \cdot \varepsilon_t$ , donde  $E$  es el módulo de elasticidad corriente. En cambio, para la tensión de las fibras externas de la derecha, la deformación vale  $\varepsilon_c$ , claro que, al no seguir la relación tensión–deformación una ley lineal, le corresponde a la tensión una función  $\sigma_c = E_{(\varepsilon)} \cdot \varepsilon_c$ , donde  $E_{(\varepsilon)}$  es un módulo de plasticidad que depende de la ley tensión–deformación ( $\sigma-\varepsilon$ ), no obstante, dada la pequeñez de la rotación por haberse aplicado a la barra un momento infinitesimal es que Engesser reemplazó la curva NC por una tangente en N (la recta ND), aplicando entonces el módulo tangente  $E_t$  definido en la Ec. (5), con lo cual resulta:  $\sigma_c = E_t \cdot \varepsilon_c$ .

Al analizar una sección cualquiera de la barra y estando la misma en equilibrio se debe cumplir que:

$$\sum Y = 0 \quad \text{y} \quad \sum M = 0$$

donde las fuerzas  $Y$  y los momentos  $M$  son producidos por la fuerza perturbatriz.

De acuerdo a Hooke:

$$\sigma'_t = E \cdot \varepsilon'_t \quad \text{y} \quad \sigma'_c = E_t \cdot \varepsilon'_c$$

Del diagrama de deformaciones de la Fig. 8 (c) obtenemos:

$$\varepsilon'_t \cdot dx = v_t \cdot d\varphi = v_t \cdot w'' \cdot dx$$

$$\varepsilon'_c \cdot dx = v_c \cdot d\varphi = v_c \cdot w'' \cdot dx$$

$$dY_t = \sigma'_t \cdot dF_t \quad (\text{Esfuerzo en la zona traccionada})$$

$$dY_c = \sigma'_c \cdot dF_c \quad (\text{Esfuerzo en la zona comprimida})$$

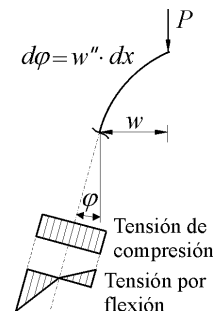
Haciendo  $\Sigma Y = 0$  tenemos que:

$$-\int_{F_t} dY_t + \int_{F_c} dY_c = 0$$

En la expresión anterior, por estar en equilibrio la barra, no se pone en evidencia la carga exterior  $P$  dado que se equilibra con la carga interna  $P = \sigma_c \cdot F$ .

$$-\int_{F_t} \sigma'_t \cdot dF_t + \int_{F_c} \sigma'_c \cdot dF_c = 0$$

$$-\int_{F_t} E \cdot \varepsilon'_t \cdot dF_t + \int_{F_c} E_t \cdot \varepsilon'_c \cdot dF_c = 0$$



$$\begin{aligned}
& - \int_{F_t} E \cdot v_t \cdot w'' \cdot dF_t + \int_{F_c} E_t \cdot v_c \cdot w'' \cdot dF_c = 0 \\
& - E \cdot w'' \cdot \int_{F_t} v_t \cdot dF_t + E_t \cdot w'' \cdot \int_{F_c} v_c \cdot dF_c = 0
\end{aligned}$$

En la expresión anterior, las integrales son los momentos estáticos de la zona traccionada y comprimida respecto al eje neutro, por lo tanto nos queda:

$$- E \cdot S_{F_t} + E_t \cdot S_{F_c} = 0 \quad (7)$$

Esta es la ecuación que nos permite determinar la posición del eje neutro, en dependencia con los momentos estáticos de la sección y, al mismo tiempo, de las magnitudes  $E$  y  $E_t$  que son los módulos de elasticidad común y tangencial.

Aquí la línea neutra no coincide con el centro de gravedad de la sección como sucede en el campo elástico, existiendo un cierto desplazamiento “ $e$ ” entre ambos ejes. No quiere decir que sea  $e = 0$ , sino que, “ $e$ ” es de segundo orden frente al radio de la curvatura de la elástica que es muy grande respecto al tamaño de la pieza, además, al iniciarse el pandeo se supone que la pieza se arquea infinitesimalmente y “ $e$ ” es muy pequeño, de seguirse aumentando la carga “ $e$ ” aumentaría, pero a nosotros nos interesa saber solamente el instante de iniciación de la deformación transversal que se produce cuando  $P = P_K$ .

Aplicando la segunda ecuación de equilibrio,  $\Sigma M = 0$ , estableceremos una igualdad entre el momento exterior y el interior para cuando se inicia el pandeo infinitesimal.

El momento externo por flexión, que actúa a causa del arqueamiento de la pieza es:

$$M_{(x)} = P \cdot w_{(x)}$$

$$\int_{F_t} v_t \cdot dY_t + \int_{F_c} v_c \cdot dY_c + P \cdot w = 0$$

$$\int_{F_t} v_t \cdot \sigma'_t \cdot dF_t + \int_{F_c} v_c \cdot \sigma'_c \cdot dF_c + P \cdot w = 0$$

$$\int_{F_t} v_t \cdot E \cdot \varepsilon'_t \cdot dF_t + \int_{F_c} v_c \cdot E_t \cdot \varepsilon'_c \cdot dF_c + P \cdot w = 0$$

$$\int_{F_t} v_t \cdot E \cdot v_t \cdot w'' \cdot dF_t + \int_{F_c} v_c \cdot E_t \cdot v_c \cdot w'' \cdot dF_c + P \cdot w = 0$$

$$w'' \cdot E \cdot \int_{F_t} v_t^2 \cdot dF_t + w'' \cdot E_t \cdot \int_{F_c} v_c^2 \cdot dF_c + P \cdot w = 0$$

En la ecuación anterior, los términos que están dentro de la integral son los momentos de inercia de la pieza respecto al eje neutro, quedándonos:

$$w'' \cdot (E \cdot I_t + E_t \cdot I_c) + P \cdot w = 0$$

$$w'' + \frac{P}{(E \cdot I_t + E_t \cdot I_c)} \cdot w = 0$$

si llamamos  $k'^2 = \frac{P}{E \cdot I_t + E_t \cdot I_c}$

tendremos la ecuación diferencial del pandeo en la fase plástica del material, válida solamente en el caso de una barra articulada-articulada, siendo la misma:

$$w'' + k'^2 \cdot w = 0$$

Para obtener la ecuación diferencial generalizada, de cualquier tipo de sustentación, bastará cambiar en la ecuación de Euler el valor  $k$  por  $k'$ .

Si llamamos con  $I$  al momento de inercia de la sección total, referido al eje que se considere, y  $T$  a la siguiente expresión, tendremos que:

$$T = \frac{E \cdot I_t + E_t \cdot I_c}{I} \tag{8}$$

$$T \cdot I = E \cdot I_t + E_t \cdot I_c \quad \Rightarrow \quad k'^2 = \frac{P}{T \cdot I}$$

quedando, la ecuación diferencial de pandeo en el campo plástico, igual a:

$$w'' + \frac{P}{T \cdot I} \cdot w = 0$$

donde  $T$  es el **módulo plástico de pandeo de Von Karman**. Está en función de la forma de la sección y del valor inicial de la compresión, con lo que queda definido el módulo tangente  $E_t$ .

La solución de esta ecuación para una barra articulada-articulada, es idéntica a la obtenida cuando estudiamos el pandeo elástico de Euler, con la sola diferencia de reemplazar  $E$  por  $T$ .

Resumiendo tenemos que:

Campo elástico $\Rightarrow$	$\sigma_{Ki} = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot E$	donde: $E =$ Constante
Campo plástico $\Rightarrow$	$\sigma_K = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot T$	donde: $T =$ Variable con la tensión inicial y la forma de la sección.

A  $T$  se lo llama también **módulo de pandeo de Engesser–Karman**.

$$\text{Si } \sigma = \sigma_p \Rightarrow E_t = E$$

reemplazando el valor de  $E_t$  en la Ec.(8) tendremos que:

$$T = \frac{E \cdot I_1 + E_t \cdot I_2}{I} = \frac{E \cdot (I_1 + I_2)}{I} = \frac{E \cdot I}{I} = E$$

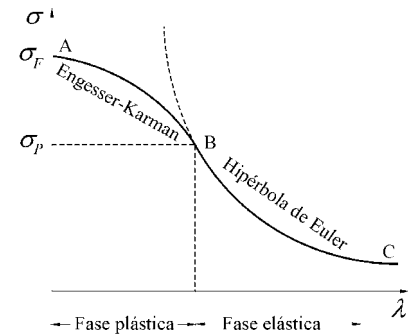


Fig. 9

Esta demostración nos hace ver que, en el punto “B” de transición entre la hipérbola de Euler y la curva de Engesser–Karman, se da la continuidad buscada, de acuerdo con el diagrama de la Fig. 9.

### 5.1.- Cálculo del valor de $T$ para una sección rectangular

Calcularemos los momentos estáticos de la sección que se tracciona ( $S_{F_t}$ ) y se comprime ( $S_{F_c}$ ) con la flexión, según el eje neutro  $n-n$  de las tensiones de flexión (Fig. 10). Recordemos que el eje neutro depende de la tensión de compresión  $\sigma$ , que corresponde a la configuración recta de la barra.

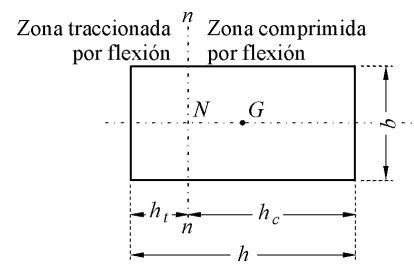


Fig. 10

$$S_{F_t} = b \cdot h_t \cdot \frac{h_t}{2} = \frac{b \cdot h_t^2}{2} \quad \text{y} \quad S_{F_c} = b \cdot h_c \cdot \frac{h_c}{2} = \frac{b \cdot h_c^2}{2}$$

reemplazando estos momentos estáticos en la Ec. (7), deducida con anterioridad (Art. 5):

$$-E \cdot S_{F_t} + E_t \cdot S_{F_c} = 0 \quad \therefore \quad \text{tendremos que}$$

$$-E \cdot \frac{b \cdot h_t^2}{2} + E_t \cdot \frac{b \cdot h_c^2}{2} = 0$$

$$E \cdot h_t^2 = E_t \cdot h_c^2$$

determinaremos, a partir de la igualdad anterior y calculando cuanto vale  $h_t$  y  $h_c$ , la posición del eje neutro:

Cálculo de $h_t$	Cálculo de $h_c$
$E \cdot h_t^2 = E_t \cdot (h - h_t)^2$	$E \cdot (h - h_c)^2 = E_t \cdot h_c^2$
$\sqrt{E} \cdot h_t = \sqrt{E_t} \cdot (h - h_t)$	$\sqrt{E} \cdot (h - h_c) = \sqrt{E_t} \cdot h_c$
$\sqrt{E} \cdot h_t = \sqrt{E_t} \cdot h - \sqrt{E_t} \cdot h_t$	$\sqrt{E} \cdot h - \sqrt{E} \cdot h_c = \sqrt{E_t} \cdot h_c$
$h_t(\sqrt{E} + \sqrt{E_t}) = \sqrt{E_t} \cdot h$	$\sqrt{E} \cdot h = (\sqrt{E} + \sqrt{E_t}) \cdot h_c$
$h_t = h \cdot \frac{\sqrt{E_t}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}}$	$h_c = h \cdot \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}}$

Calcularemos los momentos de inercia total y de cada sección que reemplazaremos en el módulo plástico de pandeo  $T$  de Von Karman, que vimos en la Ec.(8) del Art. 5:

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad ; \quad I_t = \frac{b \cdot h_t^3}{12} + b \cdot h_t \cdot \left(\frac{h_t}{2}\right)^2 = \frac{b \cdot h_t^3}{3} \quad ; \quad I_c = \frac{b \cdot h_c^3}{3}$$

$$T = \frac{E \cdot I_t + E_t \cdot I_c}{I} = \frac{E \cdot \frac{b \cdot h_t^3}{3} + E_t \cdot \frac{b \cdot h_c^3}{3}}{\frac{b \cdot h^3}{12}} = 4 \cdot \frac{E \cdot h_t^3 + E_t \cdot h_c^3}{h^3} =$$

$$= 4 \cdot \left[ E \cdot \left(\frac{\sqrt{E_t}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}}\right)^3 + E_t \cdot \left(\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}}\right)^3 \right] =$$

$$= 4 \cdot \left[ \frac{E \cdot E_t \cdot \sqrt{E_t}}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t}) \cdot (\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2} + \frac{E \cdot E_t \cdot \sqrt{E}}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t}) \cdot (\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2} \right] =$$

$$= 4 \cdot \frac{E \cdot E_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2} \cdot \frac{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}}$$

Quedándonos el módulo plástico de pandeo  $T$  de Von Karman para una sección rectangular igual a:

$$T = \frac{4 \cdot E \cdot E_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2} \tag{9}$$



### 5.2.- Cálculo del valor de $T$ para una sección doble te

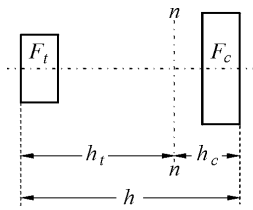


Fig. 11

Ahora estudiaremos una sección doble te, o más bien aproximada, dado que lo que tendremos en cuenta son solamente las dos alas de la misma.

Realizando un procedimiento de cálculo igual al anterior obtendremos que, el módulo plástico de pandeo de Von Karman  $T$  vale:

$$T = \frac{2 \cdot E \cdot E_t}{E + E_t}$$

Si comparamos los módulos  $T$  de las dos secciones estudiadas veremos que, es mayor el que corresponde a la sección rectangular:

$$T_{\text{Rectángulo}} = \frac{4 \cdot E \cdot E_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2} = 2 \cdot E \cdot E_t \cdot \frac{2}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2} = 2 \cdot E \cdot E_t \cdot \frac{2}{E + 2 \cdot \sqrt{E} \cdot \sqrt{E_t} + E_t}$$

$$T_{\text{Rectángulo}} = 2 \cdot E \cdot E_t \cdot \frac{1}{\frac{E + E_t}{2} + \sqrt{E \cdot E_t}}$$

$$T_{\text{Doble te}} = \frac{2 \cdot E \cdot E_t}{E + E_t} = 2 \cdot E \cdot E_t \cdot \frac{1}{\frac{E + E_t}{2} + \frac{E + E_t}{2}}$$

La diferencia entre  $T_{\text{Rectángulo}}$  y  $T_{\text{Doble te}}$  consiste en que:

el denominador del módulo de la sección rectangular vale:  $\frac{E + E_t}{2} + \sqrt{E \cdot E_t}$

el denominador del módulo de la sección doble te vale:  $\frac{E + E_t}{2} + \frac{E + E_t}{2}$

El teorema de Cauchy nos dice que, la media geométrica es menor que la media aritmética, es decir,  $\sqrt{E \cdot E_t} < \frac{E + E_t}{2}$ , por lo tanto, tendremos que el  $T_{\text{Rectángulo}}$  será siempre mayor que el  $T_{\text{Doble te}}$ .

La media geométrica y la media aritmética son iguales cuando  $E = E_t$ , pero a medida que aumenta la diferencia entre  $E$  y  $E_t$  se hace cada vez menor la diferencia de la media geométrica respecto a la media aritmética.

La variación de la magnitud del módulo de pandeo plástico  $T$ , fue investigada por Von Karman mediante ensayos, nuevamente comprobada para establecer el reglamento DIN 4114 y depende efectivamente de la forma de la sección transversal pero en muy pequeña medida (como lo

demuestra el gráfico comparativo de la Fig. 12 para el acero F-24) sobre todo en secciones de doble simetría, lo que aún es válido para casos de simetría simple.

Por lo tanto, el valor del módulo de pandeo plástico  $T$  para la sección rectangular se usa para otras secciones, ya que el valor es numéricamente poco sensible a los cambios de sección.

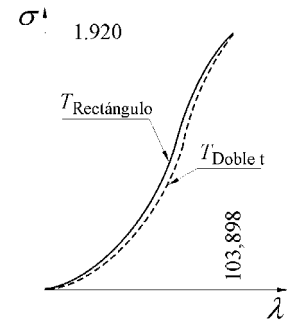


Fig. 12

## 6.- EL EFECTO SHANLEY

Las dos teorías –de Engesser y Engesser–Karman– parten del supuesto de que con el aumento de la cargas se alcanza un estado de bifurcación del equilibrio. Pero, como lo demostró F. R. Shanley en 1947, ninguna de las suposiciones de Engesser son ciertas (en la práctica no existe una barra ideal, porque no hay barra geoméricamente perfecta, ni una carga correctamente centrada, no hay proporcionalidad entre tensiones y deformaciones, además el módulo varia según la tensión) ya que lo que se produce con el incremento de la carga no es un proceso de bifurcación del equilibrio, sino un proceso de desviación del equilibrio.

Engesser, en su primera teoría, partió de la teoría de Euler donde  $P_{Ki} = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot E \cdot I$ , pero reemplazando el módulo de elasticidad  $E$  por el módulo tangencial  $E_t = E_{(e)}$  para el pandeo en el campo plástico o anelástico, quedando así:  $P_K = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot E_t \cdot I$ . En su segunda teoría mejorada, consideró el efecto de descarga en la parte externa de la barra –secundariamente arqueada– al iniciarse los procesos de pandeos infinitesimales. Esta teoría, comprobada por Von Karman presentaba un efecto de bifurcación del equilibrio y dependía del módulo de pandeo  $T = \frac{E \cdot I_t + E_t \cdot I_c}{I}$ .

Sin embargo, como lo demostró Shanley, ningunas de estas teorías son válidas. El método de Engesser–Karman lo sería y experimentalmente nos acercamos a él en una barra hipotéticamente perfecta, pero esto en la práctica no sucede ya que en la realidad no existe un fenómeno de bifurcación del equilibrio, sino que, a causa de las deformaciones inevitables se da una desviación del equilibrio.

Según Shanley, si admitimos que una barra puede pandear a ambos lados de la configuración primaria o inicial, la carga  $P$ , cumple con la siguiente condiciones:

$$P_{K Engesser} < P_{K Shanley} < P_{K Engesser-Karman}$$

$$P_{KE} < P_{KS} < P_K$$

$P_{KS}$  es la carga crítica obtenida por Shanley para una barra real.

$P_{KE}$  es la carga crítica obtenida con la primera teoría de Engesser, pero con la barra de Shanley.

$P_K$  es la carga crítica obtenida con la segunda teoría de Engesser, pero con la barra de Shanley.

Por lo expuesto podemos sacar las siguientes conclusiones:

- No se produce el efecto de bifurcación del equilibrio, sino una desviación del equilibrio debido a las inexactitudes inevitables de la pieza.
- Dado que el fenómeno de desviación del equilibrio es, en el fondo, un efecto de flexo-compresión diferida que aparece cuando las cargas tienen un valor dado  $P_{KS}$  (diferente para cada pieza), si se logra el equilibrio entre el trabajo externo y el interno las deformaciones se detienen, pero si ello no sucede, se producirá el incremento de las deformaciones hasta su total inutilización.
- La tensión debida a  $P_{KS}$  que inicia los pandeos, está comprendida entre  $P_{KE}$  de Engesser y  $P_K$  de Engesser-Karman, siendo este último el límite asintótico a que tienden los pandeos de Engesser y Shanley.

Este límite de Engesser-Karman es inalcanzable por las inexactitudes inevitables de las piezas, las que terminan por plegarse totalmente ante la imposibilidad de equilibrarse los trabajos internos de flexo-compresión con los externos. Esto se indica en los diagramas  $P$ ,  $w$  y  $\sigma$ ,  $\lambda$  de la Fig. 13 (a) y (b) respectivamente.

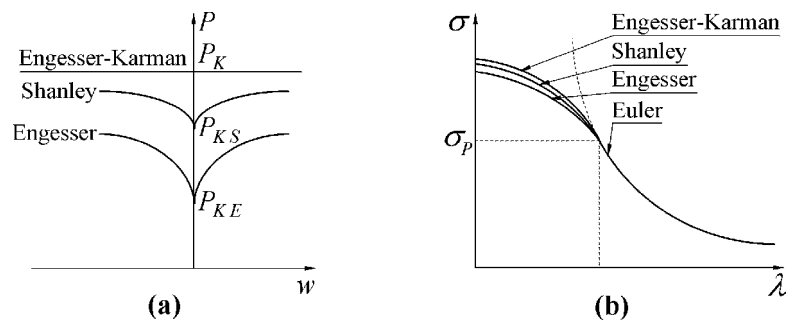


Fig. 13

## 7.- TEORIA DE ENGESSER-KARMAN SEGÚN LA DIN 4114

### 7.1.- Generalidades

En las barras rectas comprimidas axialmente y en las piezas prismáticas, solicitadas únicamente por fuerzas axiales y que sólo experimenten un pandeo por flexión, hay que distinguir (según las hipótesis establecidas para el cálculo) tres valores teóricos diferentes de la compresión crítica:

- $P_{ki}$  como la carga de pandeo ideal de Euler, deducida bajo la hipótesis de una validez ilimitada de la ley de Hooke, en conjunto con otras suposiciones igualmente ideales (barra perfectamente recta, compresión exactamente centrada, isotropía perfecta de material).
- $P_K$  como la carga crítica usual de Engesser, para cuya obtención se prescinde de la validez ilimitada de la ley de Hooke, manteniendo sin embargo, las otras hipótesis ideales (barra perfectamente recta, compresión exactamente centrada, isotropía perfecta de material).
- $P_{Kr}$  como la carga crítica real, para cuya determinación se prescinde también de las otras hipótesis ideales del tipo geométrico (barra perfectamente recta y compresión exactamente centrada).

La dificultad de la determinación teórica y la complejidad del trabajo de cálculo necesario, crecen en el orden indicado. Por esta razón, en la construcción metálica, para el dimensionado se utilizarán:

- ✓ **La carga crítica real**, sólo en los casos más sencillos, es decir que se admite la teoría de la inexactitudes inevitables.
- ✓ **La carga crítica usual de Engesser**, en general es utilizada en los casos en que se supera la tensión de proporcionalidad.
- ✓ **La carga de pandeo ideal de Euler**, en los casos de mayor dificultad. Es la más exacta, siempre y cuando se mantenga la ley de Hooke.

Si se parte de la carga crítica real  $P_{Kr}$  –para el dimensionado de una barra recta comprimida axialmente o de una pieza prismática no solicitada a flexión– se debe verificar que  $P \leq \frac{P_{Kr}}{\nu_{Kr}}$ , en donde  $P$  es la mayor carga que actúa sobre la pieza y  $\nu_{Kr}$  el coeficiente de seguridad real. Asimismo, partiendo de la carga de pandeo usual (de Engesser)  $P_K$  o de la carga de pandeo ideal (de Euler)  $P_{Ki}$ , ha de comprobarse que  $P \leq \frac{P_K}{\nu_K}$  o  $P \leq \frac{P_{Ki}}{\nu_{Ki}}$ , en donde  $\nu_K$  es el coeficiente de pandeo usual (de Engesser) y  $\nu_{Ki}$  el coeficiente de seguridad de pandeo ideal (de Euler).

Los coeficientes de seguridad  $\nu_{Kr}$ ,  $\nu_K$  y  $\nu_{Ki}$  han de estar comprendidos dentro de los límites que –por motivos de seguridad y de economía así como por los de experiencia y conocimientos teóricos– se establecen. Por tanto, han de fijarse tanto mayores cuanto más puedan apartarse de la realidad las hipótesis fundamentales, ideales y simplificadoras, admitidas para el cálculo.

El coeficiente de seguridad real  $\nu_{Kr}$  se tomará en general siempre y cuando, para la determinación de la carga crítica real, se haya tenido en cuenta la máxima excentricidad posible en la aplicación de la fuerza, “prácticamente inevitable” y según los siguientes valores:

$$\nu_{Kr} = 1,71 \quad \text{Para la hipótesis de carga 1 (solicitaciones principales)}$$

$$\nu_{Kr} = 1,50 \quad \text{Para la hipótesis de carga 2 (solicitaciones principales y secundarias)}$$

Sabemos que, el coeficiente de seguridad al pandeo de Engesser  $\nu_K$ , depende de la máxima tensión de compresión desarrollada bajo acción de  $P_{Ki}$ , pero en las piezas esbeltas y prismáticas –cuya carga de pandeo es tan pequeña que con ella no se sobrepasa el límite de proporcionalidad  $\sigma_P$  del acero– tenemos que, la carga  $P_K$  coincide con la carga de pandeo ideal  $P_{Ki}$ . Por lo tanto, el coeficiente  $\nu_K$  concuerda con el coeficiente de seguridad ideal de pandeo  $\nu_{Ki}$ . Este coeficiente no debe ser menor que:

$$\nu_{Ki} = 2,50 \quad \text{Para la hipótesis de carga 1 (solicitaciones principales)}$$

$$\nu_{Ki} = 2,19 \quad \text{Para la hipótesis de carga 2 (solicitaciones principales y secundarias)}$$

Como vemos, estos valores son notablemente mayores que los del coeficiente de seguridad real  $\nu_{Kr}$ , la condición  $P \leq \frac{P_{Ki}}{\nu_{Ki}}$  nos puede llevar –en las barras esbeltas y piezas prismáticas–

cas– a una carga admisible menor que la dada por la condición  $P \leq \frac{P_{Kr}}{V_{Kr}}$ . Por lo tanto, si se parte para el cálculo de la carga real, se tiene que efectuar siempre la doble comprobación  $P \leq \frac{P_{Kr}}{V_{Kr}}$  y

$$P \leq \frac{P_{Ki}}{V_{Ki}}.$$

## 7.2.- Coeficiente de pandeo

Algunos problemas de pandeo se pueden simplificar al determinarse la carga de pandeo –en una barra comprimida y articulada en sus extremos, de sección constante  $F$  e igual esfuerzo de compresión  $P$ – mediante la introducción de la longitud de pandeo  $s_K$ , con una aproximación más o menos aceptable.

Bajo la suposición de la constancia de la sección transversal y de la fuerza normal, se puede aplicar sencillamente que  $\frac{P}{F} \leq \sigma_{d adm}$ , en donde  $\sigma_{d adm}$  es la tensión a compresión admisible.

Para no establecer tablas especiales de los valores de  $\sigma_{d adm}$  –en los casos de carga principales o cargas principales y secundarias– y facilitar el cálculo numérico, se establece una fórmula aproximada y sencilla para el cálculo de las barras rectas solicitadas a compresión axil. Escribiendo la condición  $\frac{P}{F} \leq \sigma_{d adm}$  en la forma  $\omega \cdot \frac{P}{F} \leq \sigma_{adm}$ , en donde  $\sigma_{adm}$  es la tensión de tracción admisible, correspondiente a la hipótesis de carga considerada y al tipo de material elegido, y  $\omega = \frac{\sigma_{adm}}{\sigma_{d adm}}$  es el coeficiente de pandeo. Los coeficientes de pandeo dependen del tipo de material y del grado de esbeltez  $\lambda$  de la barra<sup>(2)</sup>.

## 7.3.- Coeficiente de seguridad al pandeo $\nu_K$ de Engesser

Si en la determinación de la tensión de pandeo se prescinde de la hipótesis de la validez ilimitada de la ley de Hooke –conservándose las restantes hipótesis ideales– y en vez de ella, se toma por base el diagrama tenso–deformación del acero, se obtienen (en lugar de las tensiones de pandeo de Euler  $\sigma_{Ki}$ ) las tensiones de Engesser, dependiendo del módulo de pandeo  $T$ .

$$\sigma_K = \left( \frac{\pi}{\lambda} \right)^2 \cdot T$$

<sup>(2)</sup> Ver las tablas 1 y 2 de las Prescripciones en la DIN 4114.

Si designamos con  $\sigma_P$  al límite de proporcionalidad y de elasticidad del acero, en el dominio  $\sigma_K \leq \sigma_P$  (campo elástico) se tiene  $T = E$  y por lo tanto,  $\sigma_K = \sigma_{Ki}$ , mientras que en el dominio plástico  $\sigma_P \leq \sigma_K \leq \sigma_F$ , el módulo plástico de pandeo  $T$  es menor que el módulo de elasticidad  $E$  y, tal que, la tensión de pandeo  $\sigma_K$  de Engesser es menor que la tensión de pandeo de Euler  $\sigma_{Ki}$ .

Si se divide  $\sigma_K$  por el coeficiente de seguridad al pandeo de Engesser  $\nu_K$ , se obtiene la tensión de compresión admisible  $\sigma_{d adm} = \frac{\sigma_K}{\nu_K}$ . Según las prescripciones, han de considerarse obligatorios los valores de  $\sigma_{d adm} = \frac{\sigma_{adm}}{\omega}$  (ver Art. 7.2), por lo tanto, ambas fórmulas tienen que relacionarse, quedando el valor de  $\nu_K = \omega \cdot \frac{\sigma_K}{\sigma_{adm}}$ . Siendo en este caso  $\omega$  el coeficiente de pandeo correspondiente a la esbeltez  $\lambda$  y  $\sigma_{adm}$  la tensión de tracción admisible para el caso considerado.

### 7.4.- Verificación de la teoría de Engesser–Karman con la DIN 4114

En el Art. 5 y en la Fig. 9 vimos que, la fórmula de Engesser–Karman es tangente al eje de la esbeltez en “A” cuando  $\sigma_K = \sigma_F$  y en “B”, donde se empalman la hipérbola de Euler y la función anelástica de Engesser. Ahora buscaremos encontrar una relación, un punto en común entre Engesser y lo establecido por el reglamento DIN 4114.

El problema consiste en establecer convenientemente la función tenso–deformación ( $\sigma-\varepsilon$ ). Por eso la DIN 4114 se decide por una función  $\sigma-\varepsilon$  basada en la tensión de pandeo de Engesser (tensión crítica en la fase plástica)  $\sigma_K = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot T$ , de tal manera concebida que, cumpliendo con la condición de tangencia en “A” y “B” (Fig.9) fuese lo más aplanada posible, lo que ofrecería mayor garantía de seguridad. Esta es la causa de que, mediante una consideración casi empírica, se tomase para todos los tipos de acero, como límite de proporcionalidad, a  $\sigma_P = 0,80 \cdot \sigma_F$  y para la curva “AB” de la Fig. 14, una ley tenso–deformación ( $\sigma-\varepsilon$ ) dada por la ecuación:

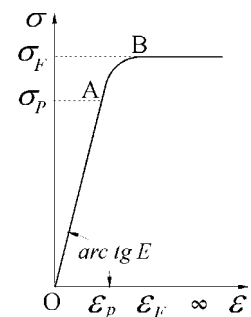


Fig. 14

$$\frac{\sigma - \sigma_P}{\sigma_F - \sigma_P} = \operatorname{tgh} \frac{\varepsilon \cdot E - \sigma_P}{\sigma_F - \sigma_P} \tag{10}$$

ecuación válida para  $\sigma_P \leq \sigma \leq \sigma_F$ .

Se determinará si es válida la Ec. (10) propuesta por la DIN 4114, o sea que se buscará comprobar si responde al diagrama tenso–deformación ( $\sigma-\varepsilon$ ) de la Fig. 14 y, si además, presenta tangencia en los puntos “A” y “B” de la curva allí representada.

Despejando tensión  $\sigma$  de la Ec. (10):

$$\sigma = \sigma_p + (\sigma_F - \sigma_p) \cdot \operatorname{tgh} \frac{\varepsilon \cdot E - \sigma_p}{\sigma_F - \sigma_p} \quad (11)$$

y reemplazando el valor de  $\sigma_p = 0,80 \cdot \sigma_F$  en la Ec. (11) tendremos:

$$\sigma = 0,80 \cdot \sigma_F + (\sigma_F - 0,80 \cdot \sigma_F) \cdot \operatorname{tgh} \frac{\varepsilon \cdot E - 0,80 \cdot \sigma_F}{\sigma_F - 0,80 \cdot \sigma_F}$$

$$\sigma = \sigma_F \cdot \left( 0,80 + 0,20 \cdot \operatorname{tgh} \frac{\varepsilon \cdot E - 0,80 \cdot \sigma_F}{0,20 \cdot \sigma_F} \right) \quad (12)$$

la Ec. (12) es válida para  $\varepsilon \geq \frac{0,80 \cdot \sigma_F}{E}$  y en ella concuerdan plenamente tanto los valores experimentales como las condiciones de continuidad según:

$$\text{Si } \varepsilon = \frac{0,80 \cdot \sigma_F}{E} \Rightarrow \sigma = 0,80 \cdot \sigma_F = \sigma_p \quad \therefore \text{Continuidad en el punto "A"}$$

$$\text{Si } \varepsilon = \infty \Rightarrow \sigma = \sigma_F^{(3)} \quad \therefore \text{Continuidad en el punto "B"}$$

A continuación demostraremos que, cuando  $\varepsilon = \varepsilon_p$  deben coincidir el módulo tangencial  $E_t$  y el módulo plástico de pandeo  $T$  con el módulo de elasticidad  $E$ .

Veremos si  $E_t = E$ , para ello derivamos la Ec. (12)

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \sigma_F \cdot \left( 0,80 + 0,20 \cdot \operatorname{tgh} \frac{\varepsilon \cdot E - 0,80 \cdot \sigma_F}{0,20 \cdot \sigma_F} \right) \right] =$$

$$= 0,20 \cdot \sigma_F \cdot \frac{E}{0,20 \cdot \sigma_F} \cdot \frac{1}{\cosh^2 \frac{\varepsilon \cdot E - 0,80 \cdot \sigma_F}{0,20 \cdot \sigma_F}} =$$

$$= \frac{E}{\cosh^2 \frac{\varepsilon \cdot E - 0,80 \cdot \sigma_F}{0,20 \cdot \sigma_F}} = \frac{E}{\cosh^2 \frac{\varepsilon \cdot E - \sigma_p}{\sigma_F - \sigma_p}} \quad (13)$$

en la Ec. (13) si  $\varepsilon = \varepsilon_p$  implica que  $\sigma = \sigma_p$ , quedándonos  $\cosh^2 0 = 1$ , por lo tanto se demuestra que el módulo tangencial  $E_t$  es:

$$E_t = E \quad (14)$$

---

<sup>(3)</sup> Si  $\sigma = \sigma_F$  la ecuación  $\frac{\sigma - \sigma_p}{\sigma_F - \sigma_p} = \operatorname{tgh} \frac{\varepsilon \cdot E - \sigma_p}{\sigma_F - \sigma_p}$  quedará que  $\operatorname{tgh} \frac{\varepsilon \cdot E - \sigma_p}{\sigma_F - \sigma_p} = 1$ , siendo  $\frac{\varepsilon \cdot E - \sigma_p}{\sigma_F - \sigma_p} = \infty$ , por lo tanto  $\varepsilon \cdot E = \infty$  y de aquí es que:  $\varepsilon = \infty$ .

Para demostrar que  $T = E$  partiremos del coeficiente de minoración  $\chi$  –de la DIN 4114– donde se relacionan las teorías de Euler y Engesser según:

$$\chi = \frac{\sigma_K}{\sigma_{Ki}} = \frac{\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot T}{\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot E} = \frac{T}{E} \tag{15}$$

además utilizaremos la Ec. (9), que es el módulo plástico de pandeo  $T$  para una sección rectangular, tal que calculando la inversa del coeficiente de minoración Ec. (15) tendremos:

$$\frac{1}{\chi} = \frac{E \cdot (\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2}{4 \cdot E \cdot E_t} = \frac{E + 2 \cdot \sqrt{E \cdot E_t} + E_t}{4 \cdot E_t} = \frac{1}{4} \frac{E}{E_t} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{E}{E_t}} + \frac{1}{4}$$

siendo:

$$\frac{1}{\chi} = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{E}{E_t}} \right)^2 \tag{16}$$

para  $\varepsilon = \varepsilon_p$  habíamos demostrado (en la Ec. 14) que  $E_t = E$ , por lo tanto,  $\frac{1}{\chi} = 1$  lo que implica que la Ec. (15) queda:

$$T = E$$

Por último, relacionaremos el pandeo de Engesser–Karman con la función tenso–deformación de las norman DIN.

Partimos de la Ec. (13) que establece:

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{E}{\cosh^2 \frac{\varepsilon \cdot E - \sigma_P}{\sigma_F - \sigma_P}} \tag{17}$$

y recordando la función hiperbólica de:

$$\operatorname{tgh} \varphi = 1 - \frac{1}{\cosh^2 \varphi} \quad \therefore \quad \frac{1}{\cosh^2 \varphi} = 1 - \operatorname{tgh} \varphi$$

luego, reemplazando esta función hiperbólica en la Ec. (17) y teniendo en cuenta la Ec. (10), se tendrá:

$$E_t = E \cdot \left( 1 - \operatorname{tgh}^2 \frac{\varepsilon \cdot E - \sigma_P}{\sigma_F - \sigma_P} \right) = E \cdot \left[ 1 - \left( \frac{\sigma - \sigma_P}{\sigma_F - \sigma_P} \right)^2 \right] \tag{18}$$



Relacionando las teorías de Euler y Engesser se obtiene la Ec. (16), que es la inversa del coeficiente de minoración  $\chi$ . En ella, reemplazando  $E/E_t$  de la Ec. (18) cuando  $\sigma = \sigma_K$ , nos quedará:

$$\frac{1}{\chi} = \frac{\sigma_{Ki}}{\sigma_K} = \frac{E}{T} = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{E}{E_t}} \right)^2 = \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{\sigma_K - \sigma_P}{\sigma_F - \sigma_P} \right)^2}} \right]^2$$

Para la barra comprimida articulada en sus dos extremos, es válida la ecuación:

$$\sigma_K = \chi \cdot \sigma_{Ki} = \chi \cdot \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \quad \therefore \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_K}{E}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\chi}}$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_K}{E}} \cdot \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sigma_F - \sigma_P)}{\sqrt{(\sigma_F - \sigma_P)^2 - (\sigma_K - \sigma_P)^2}} \right]$$

haciendo  $\sigma_P = 0,80 \cdot \sigma_F$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_K}{E}} \cdot \left[ 0,5 + \frac{0,1 \cdot \sigma_F}{\sqrt{(0,2 \cdot \sigma_F)^2 - (\sigma_K - 0,8 \cdot \sigma_P)^2}} \right] \tag{19}$$

Esta expresión relaciona la tensión de pandeo de Engesser–Karman  $\sigma_K$  con la función tenso–deformación de la norma.

En la tabla siguiente<sup>(4)</sup> y en el diagrama de la Fig. (15) se dan los valores de  $\sigma_K$  y  $\nu_K$  en función  $\lambda$ , obtenidos a partir de la Ec. (19).

$\lambda$	$\sigma_{Ki}$	$\sigma_K$	$\chi$	$\sigma_{d adm}$	$\nu_K$
20	51.815	2.397	0,046	1.349	1,77
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
103,898	1.920	1.920	1,000	707	2,72

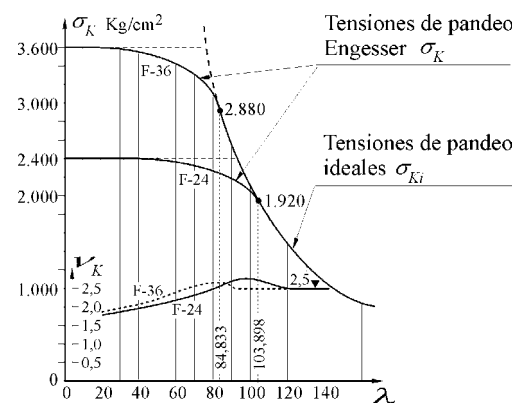


Fig. 15

<sup>(4)</sup> Ver en forma completa la Tabla 3 en Di 7.42 en la DIN 4114.

### 8.- PRIMERA TEORIA DE ENGESSER SEGÚN EL CIRSOC 302-1

El CIRSOC parte de la primera teoría de Engesser o del módulo tangente, Ec. (3), donde:  $E_t = \text{arc tg } \alpha = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$  y la tensión crítica de Engesser queda definida como:  $\sigma_K = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \cdot E_t$ .

En el campo elástico, al ser  $\sigma_k \leq \sigma_E$  se tiene que el módulo tangente  $E_t = E$ , por lo tanto,  $\sigma_k = \sigma_{Ki}$ . Mientras que en el campo plástico o anelástico ( $\sigma_E < \sigma_K \leq \sigma_F$ ) el módulo tangente  $E_t$  es menor que el módulo de elasticidad  $E$ , por lo tanto, la tensión crítica de Engesser  $\sigma_K$  es menor que la ideal de Euler  $\sigma_{Ki}$ .

Si se divide  $\sigma_K$  por el coeficiente de seguridad al pandeo de Engesser  $\gamma_K$ , se obtiene la tensión de compresión admisible  $\sigma_{c adm} = \frac{\sigma_K}{\gamma_K}$ . Según el artículo 2.2.4 del CIRSOC 302, han de

considerarse obligatorios los valores de  $\sigma_{c adm} = \frac{\sigma_{adm}}{\omega}$ , por lo tanto, ambas fórmulas tienen que relacionarse quedando el valor de:

$$\gamma_K = \omega \cdot \frac{\sigma_K}{\sigma_{adm}} = \omega \cdot \frac{\sigma_K}{\sigma_F} \cdot \gamma \tag{20}$$

siendo:

$\omega$  el coeficiente de pandeo<sup>(5)</sup> –se lo obtiene de tablas– en función de la esbeltez  $\lambda$ .

$\sigma_F$  la tensión de fluencia del acero considerado<sup>(6)</sup>.

$\gamma$  el coeficiente de seguridad para el cálculo de estructuras<sup>(6)</sup>.

El CIRSOC –con su propia denominación– a igual que la DIN 4114 (Art.7.4), a fin de disponer de una ecuación general para cualquier calidad de acero, supone que el límite de proporcionalidad es  $\sigma_E = 0,80 \cdot \sigma_F$  y, para la relación entre tensiones y deformaciones ( $\sigma$ - $\varepsilon$ ), a la Ec. (10) válida para  $\sigma_E \leq \sigma \leq \sigma_F$ , siendo la misma:

$$\frac{\sigma - \sigma_E}{\sigma_F - \sigma_E} = \text{tgh} \frac{\varepsilon \cdot E - \sigma_E}{\sigma_F - \sigma_E} \tag{21}$$

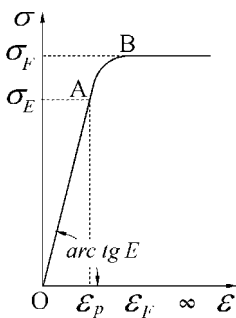


Fig. 16

A igual que en el Art. 7.4 se tratará de demostrar la validez de la Ec. (21) y la tangencia en los puntos “A” y “B” de la Fig. (16).

Despejando la tensión  $\sigma$  de la Ec. (21):

$$\sigma = \sigma_E + (\sigma_F - \sigma_E) \cdot \text{tgh} \frac{\varepsilon \cdot E - \sigma_E}{\sigma_F - \sigma_E} \tag{22}$$

<sup>(5)</sup> Ver tablas del 1 a 6 del CIRSOC 302.

<sup>(6)</sup> Ver CIRSOC 301.

La Ec. (22) es válida para  $\varepsilon \geq \frac{0,80 \cdot \sigma_F}{E}$  y con ella se demuestran las condiciones de continuidad como se analizó en el Art. 7.4.

$$\text{Si } \varepsilon = \frac{0,80 \cdot \sigma_F}{E} \Rightarrow \sigma = 0,80 \cdot \sigma_F = \sigma_E \quad \therefore \text{Continuidad en el punto "A"}$$

$$\text{Si } \varepsilon = \infty \Rightarrow \sigma = \sigma_F \quad \therefore \text{Continuidad en el punto "B"}$$

Por último, relacionaremos el pandeo de la primera teoría de Engesser con la función tenso-deformación de la Ec. (21).

Partimos de la Ec. (13) que es:

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{E}{\cosh^2 \frac{\varepsilon \cdot E - \sigma_E}{\sigma_F - \sigma_E}} \quad (23)$$

y recordando la función hiperbólica de:

$$\text{tgh } \varphi = 1 - \frac{1}{\cosh^2 \varphi} \quad \therefore \quad \frac{1}{\cosh^2 \varphi} = 1 - \text{tgh } \varphi$$

reemplazando esta función hiperbólica en la Ec. (23) y teniendo en cuenta la Ec. (21), será:

$$\begin{aligned} E_t &= E \cdot \left( 1 - \text{tgh}^2 \frac{\varepsilon \cdot E - \sigma_E}{\sigma_F - \sigma_E} \right) = E \cdot \left[ 1 - \left( \frac{\sigma - \sigma_E}{\sigma_F - \sigma_E} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{E}{(\sigma_F - \sigma_E)^2} \cdot [(\sigma_F - \sigma_E)^2 - (\sigma - \sigma_E)^2] = \\ &= \frac{E}{(0,2 \cdot \sigma_F)^2} \cdot [(0,2 \cdot \sigma_F)^2 - \sigma^2 + 2 \cdot \sigma \cdot \sigma_E - \sigma_E^2] = \\ &= E \cdot \left[ 1 - 25 \cdot \left( \frac{\sigma}{\sigma_F} \right)^2 - \frac{(0,8 \cdot \sigma_F)^2}{(0,2 \cdot \sigma_F)^2} + \frac{2 \cdot \sigma \cdot 0,8 \cdot \sigma_F}{(0,2 \cdot \sigma_F)^2} \right] = \\ &= E \cdot \left[ 1 - 25 \cdot \left( \frac{\sigma}{\sigma_F} \right)^2 - 16 + 40 \cdot \left( \frac{\sigma}{\sigma_F} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{E_t}{E} = -25 \cdot \left(\frac{\sigma}{\sigma_F}\right)^2 + 40 \cdot \left(\frac{\sigma}{\sigma_F}\right) - 15 \tag{24}$$

en la Ec. (24) se relacionan las teorías de Euler y Engesser, definiéndose el coeficiente de minoración<sup>(7)</sup>:  $\chi = \frac{\sigma_K}{\sigma_{Ki}} = \frac{E_t}{E}$ , ver Ec. (15), por lo tanto  $\sigma_K$  es:

$$\sigma_K = \sigma_{Ki} \cdot \frac{E_t}{E} = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot E \cdot \frac{E_t}{E} \tag{25}$$

haciendo  $\sigma = \sigma_K$  en la Ec. (24) y reemplazándola en la Ec. (25) tendremos que:

$$\sigma_K = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot E \cdot \left[ -25 \cdot \left(\frac{\sigma_K}{\sigma_F}\right)^2 + 40 \cdot \left(\frac{\sigma_K}{\sigma_F}\right) - 15 \right] \tag{26}$$

haciendo igual cero esta ecuación, quedará:

$$\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot E \cdot \left[ -25 \cdot \left(\frac{\sigma_K}{\sigma_F}\right)^2 + 40 \cdot \left(\frac{\sigma_K}{\sigma_F}\right) - 15 \right] - \sigma_K = 0$$

introduciendo el valor de  $\sigma_K$  dentro del corchete, multiplicando y dividiendo por  $\sigma_F$

$$\begin{aligned} -25 \cdot \left(\frac{\sigma_K}{\sigma_F}\right)^2 + 40 \cdot \left(\frac{\sigma_K}{\sigma_F}\right) - \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{\sigma_K}{E} \cdot \frac{\sigma_F}{\sigma_F} - 15 &= 0 \\ -25 \cdot \left(\frac{\sigma_K}{\sigma_F}\right)^2 + 40 \cdot \left(\frac{\sigma_K}{\sigma_F}\right) - \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{\sigma_F}{E} \cdot \left(\frac{\sigma_K}{\sigma_F}\right) - 15 &= 0 \\ -25 \cdot \left(\frac{\sigma_K}{\sigma_F}\right)^2 + \left(40 - \frac{\lambda^2}{\pi^2} \cdot \frac{\sigma_F}{E}\right) \cdot \left(\frac{\sigma_K}{\sigma_F}\right) - 15 &= 0 \end{aligned} \tag{27}$$

esta es una ecuación de segundo grado ( $a \cdot x^2 + b \cdot x - c = 0$ ), cuya solución está dada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

la Ec. (27) quedará expresada:

---

<sup>(7)</sup> Denominación que la DIN 4114 le da a  $\chi$ .

$$\frac{\sigma_K}{\sigma_F} = \frac{\frac{\lambda^2}{\pi^2} \cdot \frac{\sigma_F}{E} - 40 + \sqrt{\left(40 - \frac{\lambda^2}{\pi^2} \cdot \frac{\sigma_F}{E}\right)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 15}}{-2 \cdot 25}$$

$$\frac{\sigma_K}{\sigma_F} = 0,8 - \frac{\lambda^2}{\pi^2} \cdot \frac{\sigma_F}{50 \cdot E} + \sqrt{\left(0,8 - \frac{\lambda^2}{\pi^2} \cdot \frac{\sigma_F}{50 \cdot E}\right)^2 - 0,6}$$

$$\sigma_K = \sigma_F \cdot \left[ 0,8 - \frac{\lambda^2}{\pi^2} \cdot \frac{\sigma_F}{50 \cdot E} + \sqrt{\left(0,8 - \frac{\lambda^2}{\pi^2} \cdot \frac{\sigma_F}{50 \cdot E}\right)^2 - 0,6} \right] \tag{28}$$

Expresión que relaciona la primera teoría de Engesser con la función tenso-deformación del CIRSOC 302-1.

En la siguiente tabla<sup>(8)</sup>, a partir de la Ec. (28), se dan los valores de  $\sigma_K$  y  $\rho = \frac{\gamma_K}{\gamma}$  –Ec. (20)– en función de esbeltez  $\lambda$ , para los distintos tipos de acero.

F-24				
$\lambda$	$\sigma_{Ki}$	$\sigma_K$	$\rho$	$\chi$
20	51.815	2.389	1,19	0,046
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
103,898	1.920	1.920	1,82	1,000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
150	92,1	-.	1,67	-.

Ing. Narciso A. Gómez

**Bibliografía:**

- 1.- “La Estructura Metálica de Hoy” por el Ramón Argüelles Alvarez.
- 2.- “La Construcción Metálica”. Tomo I. Traducción de la obra Alemana “Stahlbau”.
- 3.- “El Acero en la Construcción”. Manual para el Proyecto, Cálculo y Ejecución de Construcciones en Acero.
- 4.- “Recomendaciones CIRSOC 301”. Proyecto, Cálculo y Ejecución de Estructuras de Acero para Edificios.
- 5.- “Recomendaciones CIRSOC 302-1”. Método de Cálculo para los Problemas de Estabilidad del Equilibrio en las Estructuras de Acero.
- 6.- “Pandeo Centrado en el Campo Plástico” por el Ing. Adalberto Blödorn.
- 7.- “Pandeo en el Campo Plástico” por el Ing. Nicolás Krukoski.

<sup>(8)</sup> Ver en forma completa las Tablas 3 en la Recomendación 302-1.