4

Compresión Excéntrica en el Campo Elástico

La compresión excéntrica en el campo elástico

Hasta ahora, cuando determinábamos las tensiones en una estructura, se hacían todos los cálculos sobre la configuración inicial sin tener en cuenta que la misma cambia ante la acción de las cargas actuantes. Este procedimiento es válido para las barras normales de estructuras usuales en construcción que son bastante rígidas y con un sistema de cargas tal que provoque en las barras esfuerzos M, Q y N.

En el caso en que la carga actuante sobre una barra sea una compresión centrada, ya vimos el fenómeno de inestabilidad del equilibrio que puede producir el colapso de la barra con tensiones de compresión sumamente reducidas. Aquí estudiaremos las tensiones sobre la configuración deformada de la barra, aunque hacíamos una simplificación ($y'^2 \cong 0$) válida también por estar en el campo de las pequeñas deformaciones (barras de construcción). Calcular las tensiones sobre la configuración curva de la barra, le permitió a Euler llegar a su célebre fórmula:

$$\sigma_{ki} = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 .E$$

Ahora nos planteamos el estudio de barras en las que la carga de compresión se halla descentrada o bien está centrada pero además hay otras cargas que provocan una flexión. El estudio se debe hacer sobre la configuración curva de la barra y de los resultados obtenidos se verá si es importante o no esta consideración.

Ejemplo:

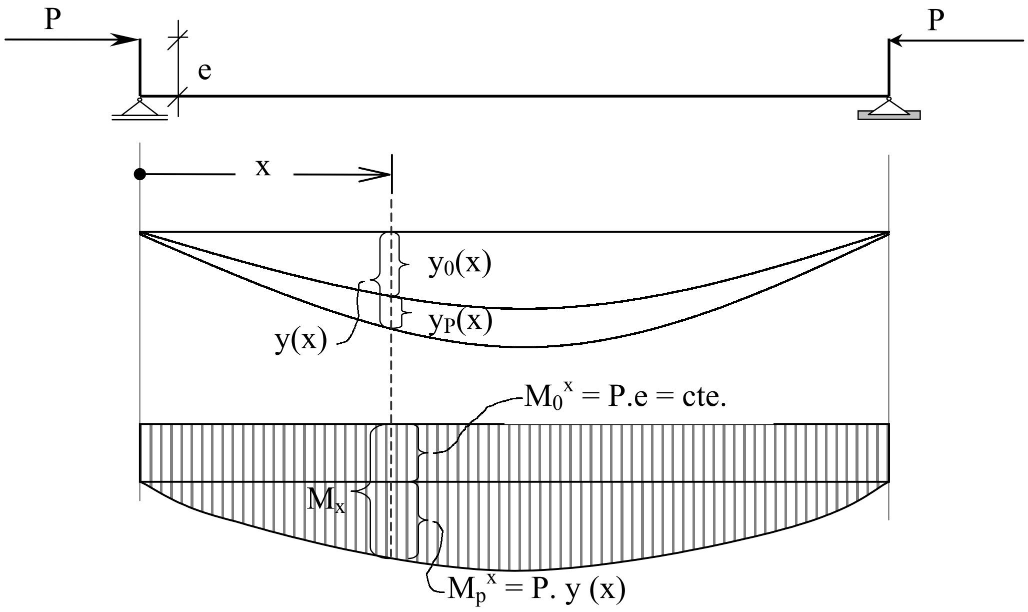
a) Compresión excéntrica

Calculando sobre la forma inicial de la barra tendremos una flecha $y_0(x)$; $M_0^x = P.e$ = cte. A la excentricidad inicial que es una constante, le sumamos la que corresponde a la deformada de la barra:

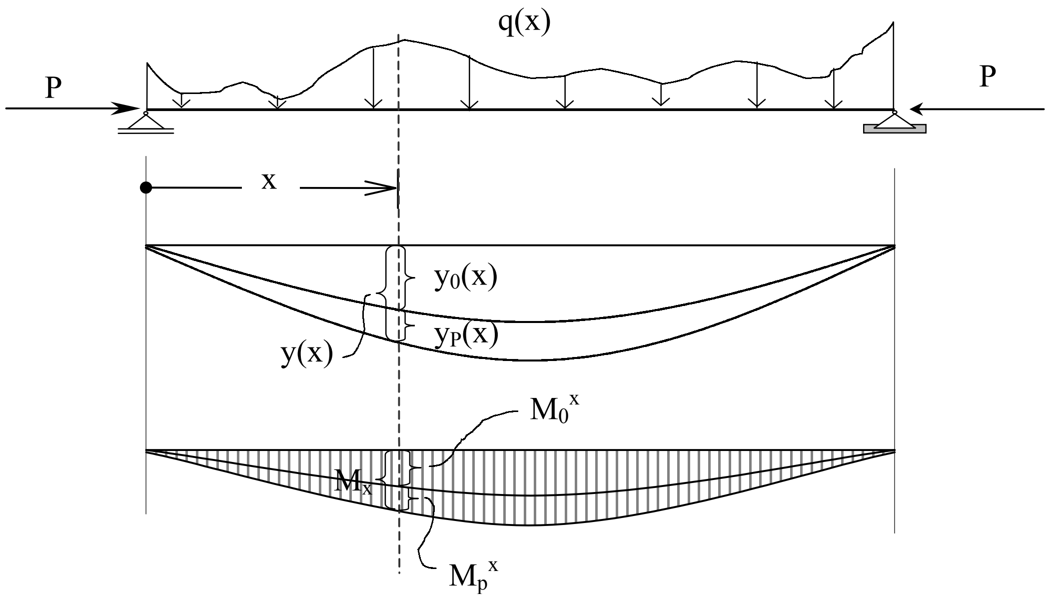
$$M_0^{\,x} = P.e$$

$$M_x = P.(e + y(x)) = P.e + P.y(x)$$

$$M_x = M_0^{\,x} + M_P^{\,x}$$



b) Compresión centrada y cargas de flexión



y_0x : Elástica obtenida a partir de la configuración recta de la barra (elástica de primer orden).
y_px : Elástica que se obtiene calculando sobre la barra deformada (elástica de segundo orden).

$$M_x = M_0{}^x + P.y(x)$$

$$M_{máx} = M_0\ máx + P.y_{máx} \qquad \text{(barras con cargas simétricas)}$$

Llamando:

$$\eta = \frac{M_{máx}}{M_0\ máx} \qquad \therefore \qquad M_{máx} = \eta . M_0\ máx$$

Donde η es un factor corrector de valor mayor o igual a la unidad (η ≥ 1).

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M_{máx}}{W} = \frac{P}{F} + \eta \frac{M_0\ máx}{W}$$

En todos los casos el problema consiste en hallar el valor de η.

Solución general para M_0^x polinomial

La ecuación de la elástica es:

$$y'' = -\frac{M_x}{E.J} \qquad \rightarrow \qquad M_x = M_0^{\ x} + P.y$$

$$y'' = -\frac{M_0^{\ x}}{E.J} - \frac{P.y}{E.J} \quad \rightarrow \quad y'' + \frac{P}{E.J}.y = -\frac{M_0^{\ x}}{E.J}$$

$$\therefore \quad y'' + k^2.y = -\frac{M_0^{\ x}}{E.J}$$

Donde esta última ecuación es una ecuación diferencial no homogénea

En el caso de pandeo centrado habíamos resuelto la homogénea:

$$y'' + k^2 . y = 0$$

cuya solución es:

$$y = A.\text{sen}\ k.x + B.\cos k.x$$

Cuando M_0^x es polinomial se soluciona la no homogénea mediante un cambio de variables:

$$y = t - \frac{M_0^{\ x}}{P} + \frac{M''_0{}^{x}}{P.k^2} - \frac{M^{iv}{}_0{}^{x}}{P.k^4} + ... \pm \frac{M^{(2i-2)}{}_0{}^{x}}{P.k^{(2i-2)}} \mp \frac{M^{(2i)}{}_0{}^{x}}{P.k^{(2i)}}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial no homogénea:

$$\left(t'' - \frac{M''_0{}^{x}}{P} - \frac{M^{iv}{}_0{}^{x}}{P.k^2} + \frac{M^{vi}{}_0{}^{x}}{P.k^4} - ... \pm \frac{M^{(2i)}{}_0{}^{x}}{P.k^{(2i-2)}} \right) + k^2 \left(t - \frac{M_0^{\ x}}{P} + \frac{M''_0{}^{x}}{P.k^2} - \frac{M^{iv}{}_0{}^{x}}{P.k^4} + ... \pm \frac{M^{(2i-2)}{}_0{}^{x}}{P.k^{(2i-2)}} \mp \frac{M^{(2i)}{}_0{}^{x}}{P.k^{(2i)}} \right) =$$

$$= -\frac{M_0^{\ x}}{E.J} = -\frac{k^2}{P}.M_0^{\ x}$$

Quedando finalmente:

$$t'' + k^2 . t = 0$$

Ecuación homogénea que tiene la ya conocida solución:

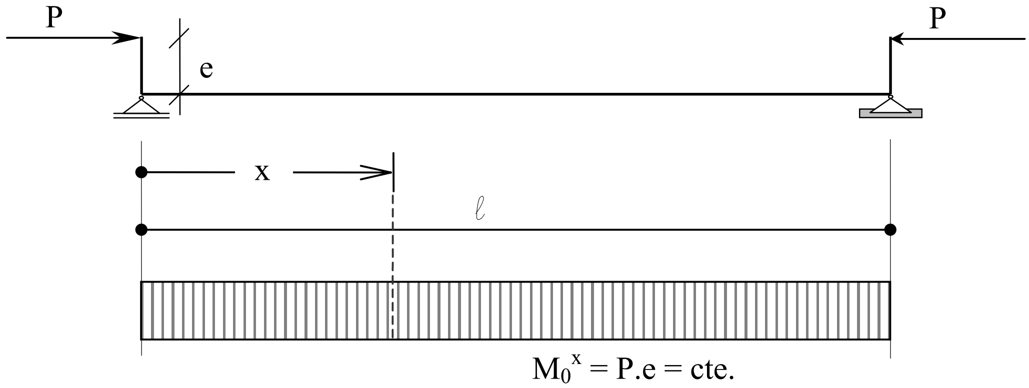
$$t = A.\text{sen}\ k.x + B.\cos k.x$$

que si reemplazamos este valor de "t" en la ecuación del cambio de variables:

$$y = A.\operatorname{sen} k.x + B.\cos k.x - \frac{M_0{}^x}{P} + \frac{M^{ii}{}_0{}^x}{P.k^2} - \frac{M^{iv}{}_0{}^x}{P.k^4} + \frac{M^{vi}{}_0{}^x}{P.k^6} - \ldots \pm \frac{M^{(2i)}{}_0{}^x}{P.k^{(2i-2)}}$$

Solución general para M_0^x polinomial.

Caso de Compresión Excéntrica



$M_0^x = P \,.\, e =$ cte.

$M_0^{x\,\prime} = M_0^{x\,\prime\prime} = M_0^{x\,(n)} = 0$ que reemplazadas en la solución general queda:

$$y = A.\operatorname{sen} k.x + B.\cos k.x - \frac{P.e}{P}$$

A y B se hallan como siempre aplicando las condiciones de borde

Condiciones de borde:

Para $x = 0 \rightarrow y = 0$
Para $x = \ell/2 \rightarrow y' = 0$ (por simetría de la elástica, tangente horizontal)

$x = 0 \rightarrow \quad A.0 + B.1 - e = 0 \quad \therefore \quad B = e$
$x = \ell/2 \rightarrow \quad A.k.\cos k.\frac{\ell}{2} - B.k.\operatorname{sen} k.\frac{\ell}{2} = 0$

de donde: $\quad A = e.\operatorname{tg} k.\dfrac{\ell}{2}$

$$y = e.\left(\operatorname{tg}\frac{k.\ell}{2}.\operatorname{sen} k.x + \cos k.x - 1\right)$$

$x = \ell/2 \Rightarrow y_{máx}$

$$y_{máx} = e.\left(tg\,\tfrac{k.\ell}{2}.sen\,\tfrac{k.\ell}{2} + cos\,\tfrac{k.\ell}{2} - 1\right) =$$

$$= \frac{e}{cos\,\frac{k.\ell}{2}}.\left(sen^2\,\tfrac{k.\ell}{2} + cos^2\,\tfrac{k.\ell}{2} - cos\,\tfrac{k.\ell}{2}\right) = \frac{e}{cos\,\frac{k.\ell}{2}}.\left(1 - cos\,\tfrac{k.\ell}{2}\right)$$

$$M_{máx} = P.(e + y_{máx}) = P.\left(e + \frac{e}{cos\,\frac{k.\ell}{2}}.\left(1 - cos\,\tfrac{k.\ell}{2}\right)\right) =$$

$$= P.e\left(1 + \frac{1}{cos\,\frac{k.\ell}{2}} - \frac{cos\,\frac{k.\ell}{2}}{cos\,\frac{k.\ell}{2}}\right) = P.e.sec\,\tfrac{k.\ell}{2}$$

$$M_0^{\,x} = P.e$$

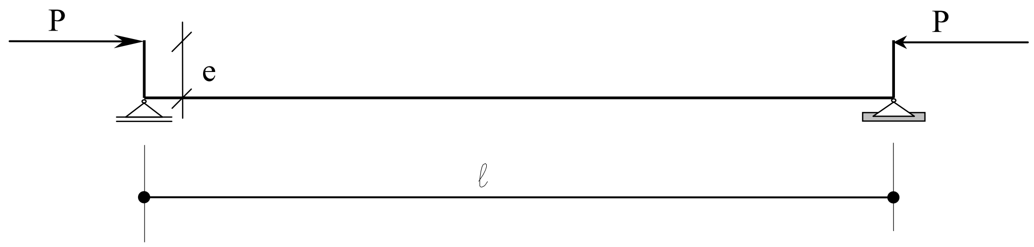
$$\eta = \frac{M_{máx}}{M_0^{\,x}} = sec\,\tfrac{k.\ell}{2}$$

$$M_{máx} = \eta.M_0^{\,x} = sec\,\tfrac{k.\ell}{2}.P.e \qquad \text{(Fórmula de la secante)}$$

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{F} + \eta.\frac{M_0^{\,x}}{W}$$

$$\boxed{\sigma_{máx} = \frac{P}{F} + sec\,\tfrac{k.\ell}{2}.\frac{P.e}{W}} \qquad \text{donde } \; k^2 = \frac{P}{E.J}$$

Influencia de la relación P/P_E sobre η



$$M\,máx = \eta.M_0^{\,x} = \eta.P.e \qquad\qquad \eta = sec\,\tfrac{k.\ell}{2}$$

$$\eta = \frac{1}{cos\,\frac{k\ell}{2}} \qquad ; \quad k = \sqrt{\frac{P}{E.J}}$$

$$P_E = \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2.E.J$$

y si hacemos $P = \alpha.P_E$

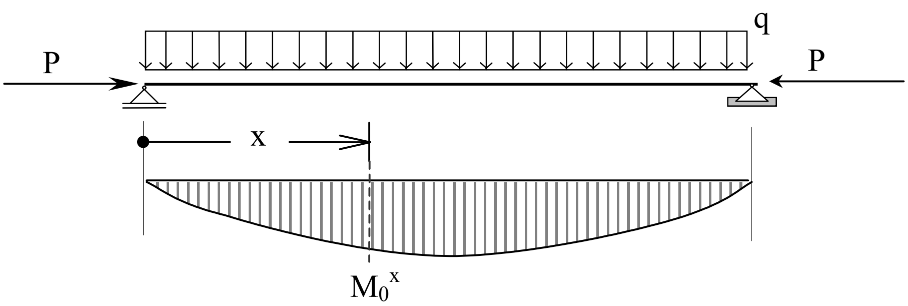
$$\eta = \frac{1}{\cos\sqrt{\frac{\alpha . P_E}{E.J}}\ \frac{\ell}{2}} = \frac{1}{\cos\sqrt{\frac{\alpha .\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 .\cancel{EJ}}{\cancel{EJ}}}\ \frac{\ell}{2}} = \frac{1}{\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{\alpha}\right]}$$

Hacemos una tabla con los valores de η según la variación de α:

$\alpha = P/P_E$	η	$\alpha = P/P_E$	η
0.10	1.14	0.91	12.25
0.20	1.31	0.92	13.85
0.30	1.53	0.93	15.93
0.40	1.83	0.94	17.69
0.50	2.25	0.95	21.23
0.60	2.88	0.96	31.84
0.70	3.94	0.97	39.79
0.8	6.03	0.98	63.66
0.85	8.18	0.99	106.10
0.90	12.25	1.00	∞

Vemos que a medida que P se va acercando a la carga crítica de Euler va creciendo el valor de η en forma muy veloz.

Caso de barra con carga uniformemente repartida de flexión y carga centrada de compresión



$$M_0^{\ x} = \frac{q\ell}{2}.x - q.\frac{x^2}{2} \qquad \text{Polinomio de segundo grado}$$

$$M'_0{}^{x} = \frac{q\ell}{2} - q.x$$

$$M''_0{}^{x} = -q$$

$$y = A.\text{sen}\,k.x + B.\cos k.x - \frac{M_0^{\ x}}{P} + \frac{M''_0{}^{x}}{P.k^2} - ...$$

$$y = A.\text{sen}\,k.x + B.\cos k.x - \frac{q.\ell}{2.P}.x + \frac{q}{2.P}.x^2 - \frac{q}{k^2.P}$$

Condiciones de borde:

$x = 0 \quad \Rightarrow y = 0$

$$y = B - \frac{q}{k^2.P} = 0 \qquad \text{de donde:} \qquad B = \frac{q}{k^2.P}$$

$x = \ell/2 \Rightarrow\ y' = 0 \qquad \therefore\ y' = A.k.\cos k.\tfrac{\ell}{2} - B.k.\operatorname{sen} k.\tfrac{\ell}{2} - \frac{q.\ell}{2.P} + \frac{2.q.}{2.P}.\frac{\ell}{2} = 0$

$$A = \left(\operatorname{sen} k.\tfrac{\ell}{2} \Big/ \cos k.\tfrac{\ell}{2}\right).B = \frac{q}{k^2.P}.\operatorname{tg} k.\tfrac{\ell}{2}$$

$x = \ell/2 \Rightarrow\ y_{máx}$

$$y_{máx} = \frac{q}{k^2.P}\operatorname{tg}\tfrac{k.\ell}{2}.\operatorname{sen}\tfrac{k.\ell}{2} + \frac{q}{k^2.P}\cos\tfrac{k.\ell}{2} - \frac{q.\ell}{2.P}\,\frac{\ell}{2} + \frac{q.}{2.P}\,\frac{\ell^2}{4} - \frac{q}{k^2.P} =$$

$$y_{máx} = \frac{q}{k^2.P}\left(\operatorname{tg}\tfrac{k.\ell}{2}.\operatorname{sen}\tfrac{k.\ell}{2} + \cos\tfrac{k.\ell}{2}\right) - \frac{q.\ell^2}{8.P} - \frac{q}{k^2.P} =$$

$$y_{máx} = \frac{q}{k^2.P}\left(\operatorname{sen}^2 k.\tfrac{\ell}{2} \Big/ \cos k.\tfrac{\ell}{2} + \cos\tfrac{k.\ell}{2} - 1\right) - \frac{q.\ell^2}{8.P} =$$

$$y_{máx} = \frac{q}{k^2.P}.\left(\operatorname{sen}^2\tfrac{k.\ell}{2} + \cos^2\tfrac{k.\ell}{2} \Big/ \cos\tfrac{k.\ell}{2} - 1\right) - \frac{q.\ell^2}{8.P} = \frac{q}{k^2.P}.\left(\frac{1}{\cos\tfrac{k.\ell}{2}} - 1\right) - \frac{q.\ell^2}{8.P} =$$

$$y_{máx} = \frac{q}{k^2.P}.\left(\sec\tfrac{k.\ell}{2} - 1\right) - \frac{q.\ell^2}{8.P}$$

$$M_{máx} = \frac{q.\ell^2}{8} + P_{y\,máx} = \frac{q.\ell^2}{8} + \frac{q}{k^2}\left(\sec\tfrac{k\ell}{2} - 1\right) - \frac{q.\ell^2}{8} = \frac{q}{k^2}\left(\sec\tfrac{k\ell}{2} - 1\right)$$

$$M_{0\ máx}^{x} = \frac{q.\ell^2}{8}$$

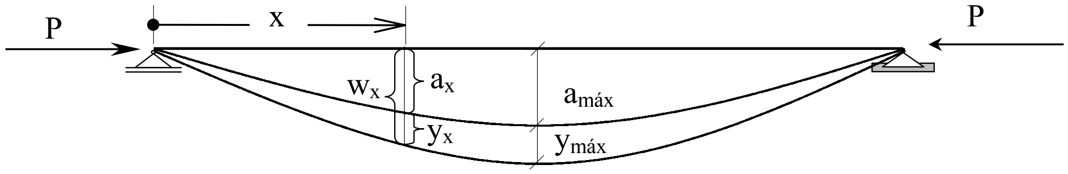
$$\eta = \frac{M_{máx}}{M_{0\ máx}^{x}} = \frac{\frac{q}{k^2}\left(\sec\tfrac{k\ell}{2} - 1\right)}{\frac{q.\ell^2}{8}} = \frac{2}{(\tfrac{k\ell}{2})^2}\left(\sec\tfrac{k\ell}{2} - 1\right)$$

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{F} + \eta.\frac{M_0{}^x}{W} = \frac{P}{F} + \eta.\frac{q\ell^2/8}{W} =$$

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{F} + \eta.\frac{q\ell^2/8}{W} = \frac{P}{F} + \frac{2}{(\frac{k.\ell}{2})^2}\left(\sec\frac{k.\ell}{2} - 1\right)\frac{q\ell^2/8}{W} =$$

$$\boxed{\sigma_{máx} = \frac{P}{F} + \frac{q}{k^2.W}\left(\sec\frac{k.\ell}{2} - 1\right)}$$

Caso de barra con curvatura previa sinusoidal



La curvatura previa obedece a la ecuación: $a_x = a_m.\text{sen}\frac{\pi}{\ell}x$

$$w_x = a_x + y_x$$
$$w_{máx} = a_m + y_x\ \text{máx}$$

$$y'' = -\frac{M}{E.J} \quad ; \qquad M = P.w_x = P.(a_x + y_x)$$

$$y'' = -\frac{M}{E.J} = -\frac{P.(a_x + y_x)}{E.J} \qquad ;\ k^2 = \frac{P}{E.J}$$

$$y'' + k^2.y = -k^2 a_x = -k^2.a_m.\text{sen}\frac{\pi}{\ell}x$$

La solución que se propone es la que sigue:

$$y = y_{máx}.\text{sen}\frac{\pi}{\ell}x$$

Verificamos:

$$y' = y_{máx}.\frac{\pi}{\ell}.\cos\frac{\pi}{\ell}x$$

$$y'' = -y_{máx}.\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2.\text{sen}\frac{\pi}{\ell}x = -y.\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$y.\left(-\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2+k^2\right)=-k^2.a_x$$

Sabemos que $P_E=(\pi/\ell)^2.E.J$ y que $k^2=\dfrac{P}{E.J}$

$\therefore$

$$y.\left(-\frac{P_E}{E.J}+\frac{P}{E.J}\right)=-\frac{P}{E.J}.a_x$$

$\therefore$

$$y=\frac{P}{P_E-P}a_x$$

Cuando $a_x = a_m$ es $y = y_{máx}$

$$y_{máx}=\frac{P}{P_E-P}a_m$$

La ecuación propuesta se verifica si el $y_{máx}$ es igual al anterior.

$$M_{máx}=P.(a_m+y_{máx})=P.(a_m+\frac{P}{P_E-P}a_m)=P.a_m(1+\frac{P}{P_E-P})=P.a_m(\frac{P_E-P+P}{P_E-P})=$$

$$=M_0{}^x{}_{máx}\left(\frac{1}{1-\frac{P}{P_E}}\right)=M_0{}^x{}_{máx}.\eta$$

$\therefore$

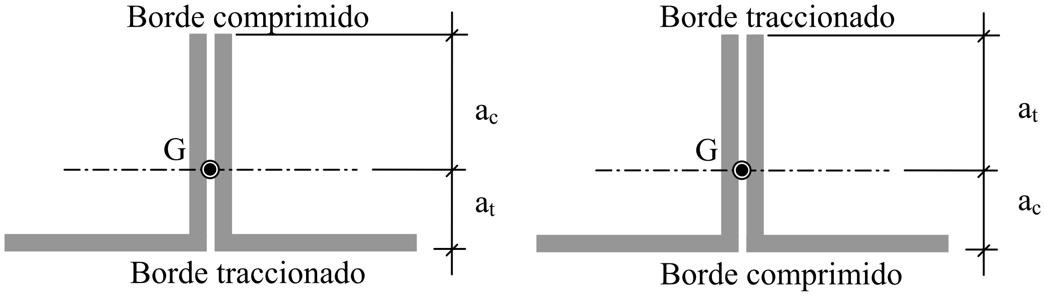
$$\eta=\left(\frac{1}{1-\frac{P}{P_E}}\right)$$

$$\sigma=\frac{P}{F}+\eta.\frac{M_0{}^x{}_{máx}}{W}=\frac{P}{F}+\eta.\frac{P.a_m}{W}$$

Hacemos una tabla de valores de η con P/P_E

P/P_E	η	P/P_E	η
0.10	1.11	0.91	11.11
0.20	1.25	0.92	12.50
0.30	1.43	0.93	14.29
0.40	1.67	0.94	16.67
0.50	2.00	0.95	20.00
0.60	2.50	0.96	25.00
0.70	3.33	0.97	33.33
0.8	5.00	0.98	50.00
0.85	6.67	0.99	100.00
0.90	10.00	1.00	∞

Flexo – Compresión según C.I.R.S.O.C. 302 y 302-1



1) Según C.I.R.S.O.C. 302 – 2.4

I) $a_c \geq a_t$

$$\omega.\frac{N}{A}+\frac{M}{W_c}\leq \sigma_{adm}$$

II) $a_c < a_t$

$$\begin{cases} \omega.\dfrac{N}{A}+\dfrac{M}{W_c}\leq \sigma_{adm} \\ \\ \omega.\dfrac{N}{A}+\dfrac{300+2.\lambda}{877}\dfrac{M}{W_t}\leq \sigma_{adm} \end{cases}$$

$$W_c=\frac{I_{xx}}{a_c} \qquad ; \qquad W_t=\frac{I_{xx}}{a_t}$$

2) Según C.I.R.S.O.C. 302-1 – 5.2

Se puede verificar la seguridad de la pieza mediante teoría de segundo orden. Suponiendo un diagrama tensión – deformación del acero elástico – plástico ideal se debe verificar que la tensión máxima en la pieza cargada con las cargas multiplicadas por γ_{kr} sea inferior a σ_F:

$$(\sigma_{máx})^* \leq \sigma_F$$

$(\sigma_{máx})^*$ es la tensión máxima calculada con teoría de segundo orden en la barra cargada con cargas multiplicadas por $\gamma_{kr} = \frac{8}{7}\gamma$.